



Graefe

Math. P.

$180^{\pm}(2)$

AUFLÖSUNGEN UND BEWEISE
DER
AUFGABEN UND LEHRSÄTZE
AUS DER
ANALYTISCHEN GEOMETRIE
DES PUNKTES,
DER GERADEN LINIE, DES KREISES
UND
DER KEGELSCHNITTE.

FÜR STUDIERENDE AN UNIVERSITÄTEN
UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

BEARBEITET

VON

DR. FR. GRAEFE,

PROFESSOR.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1886.

2/8
10

61 H

4/8

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1885. 1886.

- Euclidis opera omnia.** Ediderunt I. L. HEIBERG et H. MENGE.
Euclidis elementa. Edidit et latine interpretatus est I. L. HEIBERG,
Dr. phil. Uol. III. Librum X continens. [VI u. 417 S.] Uol. IV.
Libros XI—XIII continens. [VI u. 423 S.] 8. geh. à Uol. *M* 4.50.
- Fiedler, Dr. Wilhelm,** die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Dritte erweiterte Auflage. II. Theil. A. u. d. Titel: Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. Für Vorlesungen und zum Selbststudium. [Mit zahlreichen Figuren im Text und 16 lithographierten Tafeln.] [XXXIII u. 560 S.] gr. 8. geh. n. *M* 14.—
- Fort, O., und O. Schlömilch,** Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Teil. Analytische Geometrie des Raumes von O. SCHLÖMILCH, K. S. Geh. Rat a. D. Fünfte Auflage. [VIII u. 304 S.] gr. 8. geh. n. *M* 5.—
- Fuhrmann, W.,** Oberlehrer am Realgymnasium auf der Burg in Königsberg, O.-P., Wegweiser in der Arithmetik, Algebra und niedern Analysis, bestehend in einer geordneten Sammlung von Begriffen, Formeln und Lehrsätzen in diesen Disziplinen. [63 S.] gr. 8. kart. *M* 1.—
- Gordan's, Dr. Paul,** Vorlesungen über Invariantentheorie. Herausgegeben von Dr. GEORG KERSCHENSTEINER. Erster Band: Determinanten. [XII u. 201 S.] gr. 8. geh. n. *M* 6.40.
- Graefe, Dr. Fr.,** Professor, Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte. Für Studierende an Universitäten und technischen Hochschulen bearbeitet. [IV u. 136 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.40.
- Harnack, Axel,** Naturforschung und Naturphilosophie. Vortrag gehalten in der naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Dresden. [27 S.] gr. 8. geh. *M* —.60.
- Hecht, Dr. Wilhelm,** Dozent der Mathematik an der Kgl. Forstlehranstalt zu Aschaffenburg, zur Integration der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$. [40 S.] gr. 4. geh. n. *M* 1.—
- Heinze, Dr. Karl,** weiland Professor in Cöthen, genetische Stereometrie, bearbeitet von FRANZ LUCKE, Gymnasiallehrer in Zerbst. Mit lithographierten Tafeln. [XII u. 194 S.] gr. 8. geh. n. *M* 6.—
- Herz, Dr. Norbert,** Assistent für Astronomie und höhere Geodäsie an der k. k. technischen Hochschule in Wien, siebenstellige Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsecunde. Zum astronomischen Gebrauche herausgegeben. [IV u. 182 S.] Lex.-8. geh. n. *M* 4.—

2. Aufl.

AUFLÖSUNGEN UND BEWEISE
DER
AUFGABEN UND LEHRSÄTZE
AUS DER
ANALYTISCHEN GEOMETRIE
DES PUNKTES,
DER GERADEN LINIE, DES KREISES
UND
DER KEGELSCHNITTE.

FÜR STUDIERENDE AN UNIVERSITÄTEN
UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

BEARBEITET

VON

DR. FR. GRAEFE,
PROFESSOR.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1886.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort.

Das vorliegende Buch enthält die Antworten auf die Repetitionsfragen, die Auflösungen der numerischen Beispiele und Anleitungen zur zweckmässigen Anlage der schwierigeren Übungen meiner in demselben Verlage erschienenen Aufgabensammlung (1885).

Die Wurzelgrössen und goniometrischen Funktionen sind nicht ausgerechnet. Es ist die Theorie der Determinanten vorausgesetzt, dagegen ist keine Anwendung von der Differential- und Integralrechnung gemacht. Die Beweise sind nicht immer nach den Methoden der analytischen Geometrie, sondern nach denen der Geometrie der Lage gegeben.

In der Aufgabensammlung sind leider durch Druckfehler vier numerische Beispiele 408, 533, 535, 555 entstellt und die Aufg. 988 und 1010 übereinstimmend. Die Auflösungen geben Antwort auf die folgendermassen verbesserten Aufgaben (siehe Berichtigungen am Schluss des Buches):

Aufg. 408 Zeile 5 lies: $y^2 + 8y$ statt $x^2 + 8x$.

„ 533 lies: $-8x - 7y$ statt $-8y - 7x$.

„ 535 lies: $x = 1$ statt $x + \frac{y}{4} = 1$.

„ 555 lies: $-6w^2$ statt $+5w^2$.

„ 1010 lies: Scheitel statt Brennpunkt.

Darmstadt, im Juli 1886.

Der Verfasser.

7232 20.
7460

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Der Punkt. Aufg. 1—32	1—4
Die gerade Linie. Linienkoordinaten. Aufg. 33—133 . . .	4—27
Bestimmung von geometrischen Örtern mittelst der geraden Linie. Aufg. 134—175	28—35
Harmonische Linien und Punkte. Punkte und Linien der Involution. Dreieckskoordinaten. Aufg. 176—287 . . .	35—58
Über Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen. Aufg. 288—307	58—61
Der Kreis. Aufg. 308—385	61—77
Systeme von Kreisen. Aufg. 386—463	77—93
Die Kegelschnitte. Systeme von Kegelschnitten. Aufg. 464—735	93—129
Die Ellipse. Aufg. 736—846	129—153
Die Hyperbel. Aufg. 847—952	153—165
Die Parabel. Aufg. 953—1025	166—179
Vermischte Aufgaben. Aufg. 1026—1207	179—258

Der Punkt.

Aufg. 1 bis 6. Es sind OX , OY zwei feste gerade Linien-Koordinatenachsen. O ist der Anfangspunkt oder Ursprung. OP heisst Leitstrahl oder Radiusvektor. Ist

$$\sphericalangle XOY = 90^\circ,$$

so heisst das System rechtwinklig. Man misst die Abschnitte

- auf OX positiv,
- „ OX_1 negativ,
- „ OY positiv,
- „ OY_1 negativ.

Die Abschnitte auf X_1X heissen Abscissen, die auf Y_1Y Ordinaten.

Zieht man

$$P_1P_4 \parallel YY_1 \parallel P_2P_3, \quad P_1P_2 \parallel XX_1 \parallel P_3P_4,$$

so ist

$$\begin{aligned} OQ &= RP_1 = R_1P_4, & OQ_1 &= RP_2 = R_1P_3, & OP_1 &= -OP_3, \\ OR &= QP_1 = Q_1P_2, & OR_1 &= Q_1P_3 = QP_4, & OP_3 &= -OP_1. \end{aligned}$$

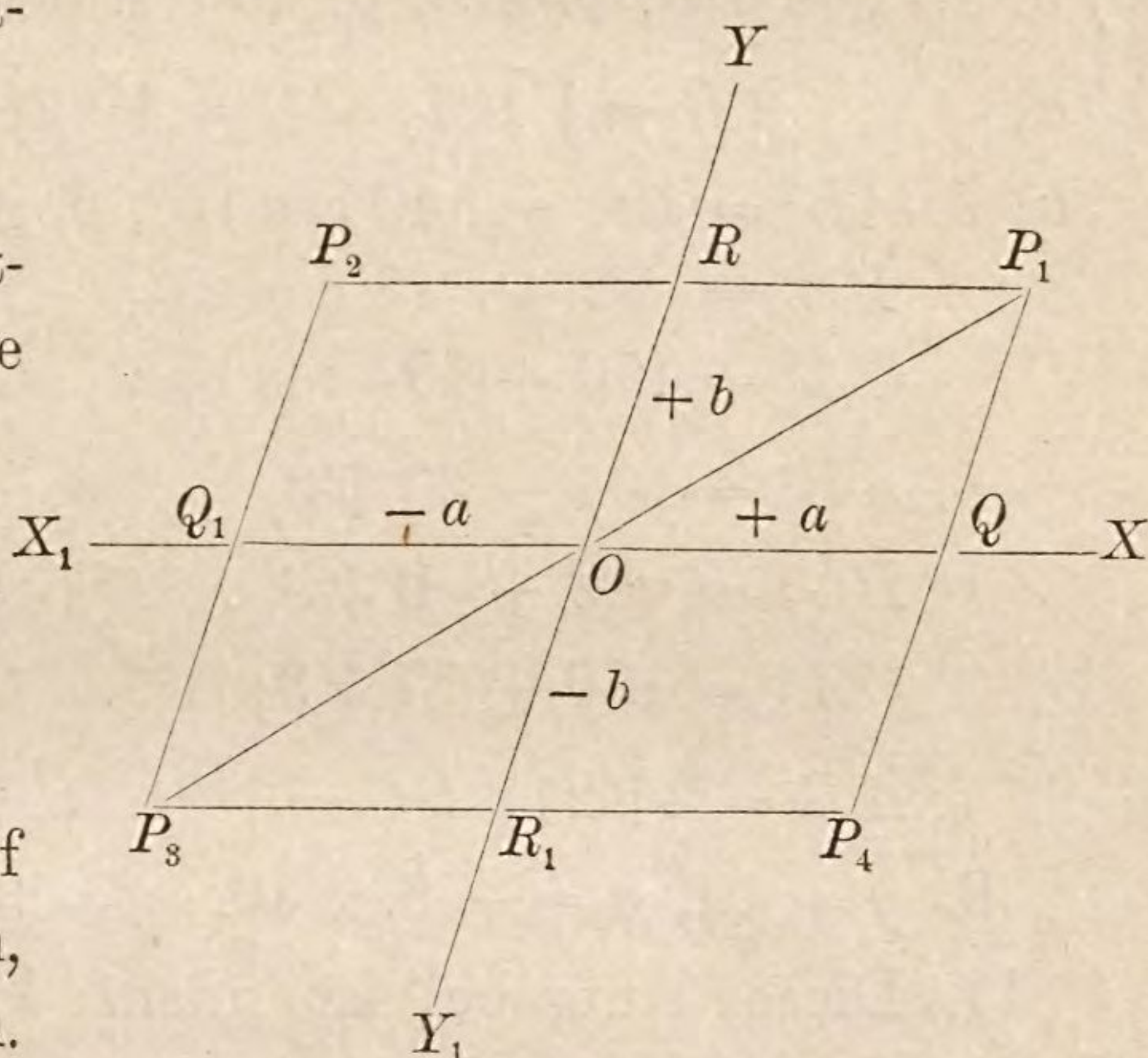
Die Abschnitte OQ , OR sind die Koordinaten von P_1 . Ist $OQ = x = a$, $OR = y = b$, so nennt man P den Punkt (x, y) oder (a, b) . Die Koordinaten

von P_1 sind $x = +a$, $y = +b$, von P_2 sind $x = -a$, $y = +b$, von P_3 sind $x = -a$, $y = -b$, von P_4 sind $x = +a$, $y = -b$.

Der Winkel POX , welcher nach einer Richtung gezählt wird, und $OP = \rho$ heissen Polarkoordinaten von P .

Ist der Winkel XOY gleich ω , so ist die Entfernung zweier Punkte (x', y') (x'', y'') gleich der Quadratwurzel aus

$$d^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2(y' - y'')(x' - x'') \cos \omega.$$



Ist $\omega = 90^\circ$, so ist

$$d^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

Fällt (x'', y'') in den Ursprung, so ist $x'' = y'' = 0$ und

$$OP^2 = x'^2 + y'^2.$$

7. Die Entfernung der Punkte $(3, 9)$, $(-4, 16)$ ist

a) $7\sqrt{2}$; b) $\alpha. 14 \sin 30^\circ$, $\beta. 14 \sin 15^\circ$, $\gamma. 14 \sin 9^\circ$.

8. Wenn die Ecken des Dreiecks die Koordinaten haben:

$A(3, 4)$, $B(5, -6)$, $C(-4, -7)$; und wenn ist $\omega = \alpha) 90^\circ$;

b) $\alpha. 15^\circ$, $\beta. 18^\circ$, $\gamma. 30^\circ$, $\delta. 45^\circ$, $\varepsilon. 60^\circ$, so ist

a) $AB = \sqrt{104}$, $BC = \sqrt{82}$, $CA = \sqrt{170}$.

b) $\alpha. AB^2 = 104 - 40 \cos 15^\circ$, $\beta. AB^2 = 104 - 40 \cos 18^\circ$,
 $BC^2 = 82 + 18 \cos 15^\circ$, $BC^2 = 82 + 18 \cos 18^\circ$,
 $CA^2 = 170 + 154 \cos 15^\circ$; $CA^2 = 170 + 154 \cos 18^\circ$;

$\gamma. AB^2 = 104 - 20\sqrt{3}$, $\delta. AB^2 = 104 - 20\sqrt{2}$,
 $BC^2 = 82 + 9\sqrt{3}$, $BC^2 = 82 + 9\sqrt{2}$,
 $CA^2 = 170 + 77\sqrt{3}$; $CA^2 = 170 + 77\sqrt{2}$;

$\varepsilon. AB = 2\sqrt{21}$, $BC = \sqrt{91}$, $CA = \sqrt{247}$.

9. $y = 19$, $y = -3$. 10. $y = 3$, $y = -13$.

11. Diese Aufgabe ist nicht lösbar, weil die Punkte $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(1, 2)$ in einer geraden Linie liegen.

12. $x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}$, $y = \frac{my'' + ny'}{m + n}$.

13. Der Punkt x, y liegt zwischen (x', y') und (x'', y'') .

14. $x = \frac{a + c}{2}$, $y = \frac{b + d}{2}$.

15. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten sind $(6, 3\frac{1}{2})$, $(-4, -5\frac{1}{2})$, $(-2, +3)$.

16. a) $(\frac{11}{3}, \frac{2}{3})$; b) $(\frac{17}{5}, 2)$; c) $(\frac{23}{7}, \frac{18}{7})$.

17, 18. $x = \frac{cx' + ax'' + bx'''}{a + b + c}$, $y = \frac{cy' + ay'' + by'''}{a + b + c}$.

19, 20. Das gegebene Koordinatensystem, welches transformiert werden soll, nennt man das alte Koordinatensystem — alte Axen —, das Koordinatensystem, zu dem man transformiert, heisst das neue Koordinatensystem — neue Axen —. Die Koordinaten des Ursprungs der neuen Axen — des neuen Anfangspunkts — in Bezug auf die alten Axen seien x', y' . Die neue Axe der x bilde mit der alten Axe der x den Winkel α , die neue Axe der y bilde mit der alten Axe der x den Winkel β , die neue Axe der x bilde mit der alten Axe der y den Winkel α' und die neue Axe der y bilde mit der alten Axe den Winkel β' . Schliessen die alten Axen den Winkel ω ein, so ist $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \omega$. Die Koordinaten eines Punktes P auf die alten Axen seien x, y und in Bezug auf die neuen Axen X, Y ; es ist

$$(x - x') \sin \omega = X \sin \alpha' + Y \sin \beta' = X \sin (\omega - \alpha) + Y \sin (\omega - \beta),$$

$$(y - y') \sin \omega = X \sin \alpha + Y \sin \beta.$$

Wenn die neuen Axen den alten Axen parallel sind, so ist: $x = x' + X, y = y' + Y$. (Parallelverschiebung der Axen.)

Wenn beide Systeme rechtwinklig sind und denselben Anfangspunkt haben, so ist $x' = 0, y' = 0, \beta - \alpha = \alpha_1 - \beta_1 = 90^\circ$, also ist

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \quad y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha.$$

Haben beide Systeme dieselbe Axe der x und ist das neue System rechtwinklig, so ist

$$y \sin \omega = Y, \quad x \sin \omega = X \sin \omega - Y \cos \omega.$$

21, 22. $x = \varrho \cos \vartheta, y = \varrho \sin \vartheta, x^2 + y^2 = \varrho^2$. Den Winkel ϑ zählt man nach einer bestimmten Richtung — von der positiven Axe der x nach der positiven Axe der y —.

$$\begin{aligned} \mathbf{23.} \quad & a_{11} X^2 + 2a_{12} XY + a_{22} Y^2 + 2a'_{13} X + 2a'_{23} Y + a'_{33} = 0, \\ & a'_{13} = a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{12} x' + a_{22} y' + a_{23}, \\ & a'_{33} = a'_{13} x' + a'_{23} y' + a_{13} x' + a_{23} y' + a_{33}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{24.} \quad X^2 + Y^2 = 31. \quad \mathbf{25.} \quad X^2 + Y^2 = 1.$$

$$\mathbf{26.} \quad X^2 - Y^2 = 10. \quad \mathbf{27.} \quad XY = 5.$$

28. Wenn der Punkt P die Koordinaten wie in Aufg. 19, 20 hat, so ist

$$OP^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos xOy, \quad OP^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos XOY$$

29. Die Antwort folgt leicht aus Aufg. 19, 20 mit Anwendung des binomischen Satzes.

$$\begin{aligned} \mathbf{30.} \quad \varrho^2 &= a^2, & \varrho^2 &= a^2 (1 + \cos \vartheta), & \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta, \\ y = \varrho \sin \vartheta. \end{cases} \\ \varrho &= m \cos \vartheta, & \varrho &= a (1 + \cos \vartheta), \\ \varrho^2 \cos 2\vartheta &= a^2, & \varrho &= a - b \cos \vartheta, \\ \varrho^2 &= a^2 \cos 2\vartheta, & \varrho &= a + \frac{b}{\sin \vartheta}. \\ \varrho &= a \sin 2\vartheta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{31.} \quad x^2 + y^2 &= a x, & (x^2 + y^2 + b x)^2 &= a^2 (x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 &= a y, & (x^2 + y^2 - a^2) (x^2 + y^2) &= a^4 x^2. \\ (x^2 + y^2)^2 (x - b)^2 &= a^2 x^2, & (y^2 + x^2)^3 &= 4 a^2 x^2 y^2, \\ (x^2 + y^2)^2 &= a^2 (x^2 - y^2), & (y^2 + x^2 - a x)^2 &= a^2 (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

32. Sind $\varrho', \vartheta'; \varrho'', \vartheta''$ die Polarkoordinaten der Punkte M, N , so ist

$$(MN)^2 = \varrho'^2 + \varrho''^2 - 2 \varrho' \varrho'' \cos (\vartheta'' - \vartheta').$$

Die gerade Linie. Linienkoordinaten.

33, 34. Die Gleichung einer geraden Linie parallel der Axe der y ist $x = a$ [wenn die Axen rechtwinklig aufeinander stehen, Aufg. 34].

35, 36. Die Gleichung einer geraden Linie parallel der Axe der x ist $y = b$ [wenn die Axen rechtwinklig aufeinander stehen, Aufg. 36].

37, 38. $n x = m y$ ist die Gleichung einer geraden Linie durch den Ursprung.

39, 40, 41. Die Gleichung $y = m x + b$ stellt eine gerade Linie dar und umgekehrt. Die Gerade schneidet die Axen in den Punkten $\left(-\frac{b}{m}, 0\right), (0, b)$ und sie bildet mit der x -Axe den durch die Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = m$ bestimmten Winkel, wenn die Axen senkrecht sind.

42. Sind a und b die resp. Abschnitte auf den Axen, so ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

die Gleichung der betreffenden geraden Linie.

43—45. Ist die Länge der vom Anfangspunkt auf die gerade Linie gefällten Senkrechten gleich p und bildet diese mit der x -Axe den Winkel α , so ist die Gleichung der geraden Linie

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

Um die Gleichung $Ax + By + C = 0$ in diese Form zu bringen, multipliziert man sie mit dem Factor $\frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$ und setzt

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{-C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist so zu nehmen, dass p positiv wird.

46. Um die Gleichung $Ax + By + C = 0$ in die Form $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ zu bringen, multipliziert man sie mit dem Faktor $\frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$. In diesem Falle ist aber $\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ nicht gleich der Länge der vom Anfangspunkt auf die gerade Linie gefällten Senkrechten.

Multipliziert man die gegebene Gleichung mit

$$\frac{\sin \omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}}$$

— ω ist der Koordinatenwinkel —, so ist die Gleichung

$$\frac{A \sin \omega \cdot x}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}} + \frac{B \sin \omega \cdot y}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}} + \frac{C \sin \omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}} = 0$$

oder

$$x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha) = p.$$

Die Grösse $p = \frac{\pm C \sin \omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}}$ ist gleich der

Länge der vom Anfangspunkt auf die gerade Linie gefällten Senkrechten. Nimmt man $\omega = 90^\circ$, so erhält man Aufg. 43—45

47. Wenn die Gleichung der gegebenen geraden Linie $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ist, so ist die Gleichung der geraden Linie, welche der gegebenen geraden Linie parallel ist und

von dem Ursprunge nach entgegengesetzter Richtung denselben Abstand hat, $x \cos \alpha + y \sin \alpha + p = 0$.

48. Ist die Gleichung der geraden Linie $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, so ist $-P = X \cos \alpha + Y \sin \alpha - p$.

49, 50. Die beiden geraden Linien schneiden sich in dem Punkte $x = \frac{b' - b}{m - m'}$, $y = \frac{m b' - m' b}{m - m'}$. Die geraden Linien sind parallel, wenn $m = m'$ ist.

51, 52. Die beiden geraden Linien schneiden sich in dem Punkte $x = \frac{C'B - CB'}{AB' - BA'}$, $y = \frac{A'C - C'A}{AB' - BA'}$. Die geraden Linien sind parallel, wenn $AB' - BA' = 0$ ist.

53. Die Gleichungen der geraden Linien seien die der Aufg. 51 und ω der Koordinatenwinkel. Bilden die geraden Linien mit der Axe der x die bez. Winkel $1 R + \alpha$, $1 R + \alpha'$, so ist

$$\cos \alpha = \frac{A \sin \omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}}, \quad \cos \alpha' = \frac{A' \sin \omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B' \cos \omega}}$$

$$\sin \alpha = \frac{B - A \cos \omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}}, \quad \sin \alpha' = \frac{B' - A' \cos \omega}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B' \cos \omega}}$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \operatorname{tg} \varphi = \frac{(A'B - AB') \sin \omega}{AA' + BB' - (AB' + A'B) \cos \omega}$$

Ist $\omega = 1 R$, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A'B - AB'}{AA' + BB'}$$

Die geraden Linien sind senkrecht, wenn $AA' + BB' = (AB' + A'B) \cos \omega$ ist und parallel, wenn $A'B - AB' = 0$ ist.

Sind die Gleichungen der geraden Linien die in Aufg. 49, so setze man $A = m$, $B = -1$, $C = b$; $A' = m'$, $B' = -1$, $C' = b'$.

54. Ist nämlich die Gleichung der geraden Linie

$$Ax + By + C = 0,$$

so kann man durch zwei Annahmen die unbekannten Zahlen $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ bestimmen.

55. Ist die Gleichung der gegebenen Linie $y = mx + b$, so ist die Gleichung der gesuchten geraden Linie $y - y' = m(x - x')$.

56. $(x - x')(y - y'') = (x - x'')(y - y')$ oder

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

57. Haben die Punkte die Koordinaten (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) , so ist

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

58. Ist der gegebene Punkt x', y' , so hat die Senkrechte die Gleichung $-Bx + Ay - Ay' + Bx' = 0$; die Länge der Senkrechten ist

$$\frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

59. $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = \pm (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2)$.

60. $\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$

61. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$

62. Man multipliziere die eine Gleichung mit einem beliebigen Faktor k , addiere die erhaltene Gleichung zur andern Gleichung und erhält eine dritte Gleichung, welche eine gerade Linie darstellt, die durch den Schnittpunkt der beiden andern geht.

63. Siehe Aufg. 52 und 62.

64. Beweis ist einfach und stützt sich auf die Aufg. 62, 63.

65. $\rho \cos \vartheta = p.$

66. Haben die Ecken des Polygons die Koordinaten x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; $x_3, y_3 \dots x_n, y_n$, so ist der doppelte Inhalt $2f$ bestimmt durch

$$\pm 2f = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \dots y_n(x_{n-1} - x_1)$$

67. $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}^2 : (AB' - A'B)(A'B'' - A''B')(A''B - AB'').$

68. Die drei ersten Geraden gehen durch den Anfangspunkt. Die Gerade $x = y$ bildet mit der x -Axe den Winkel 45° . Die gerade Linie

$$\left. \begin{array}{l} x = 6y \\ y = 3x \\ 5x = 3y \end{array} \right\} \text{ bildet mit der } x\text{-Axe einen Winkel, der gegeben ist durch } \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{6}, \\ \operatorname{tg} \varphi = 3, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{3}. \end{array} \right.$$

Die gerade Linie

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ x + y = 17 \\ 2) \ x + 17y = 300 \\ 3) \ 11x - y = 104 \\ 4) \ 7x - 3y = -11 \\ 5) \ x - y = 5 \\ 6) \ 3x + 5y + 7 = 0 \\ 7) \ 4x - 6y + 11 = 0 \\ 8) \ (x - 4) + (y - 3) = 0 \end{array} \right\} \text{ schneidet die Axen in den Punkten } \left\{ \begin{array}{l} 17, 0; 0, 17. \\ 300, 0; 0, \frac{300}{17}. \\ \frac{104}{11}, 0; 0, -104. \\ -\frac{11}{7}, 0; 0, \frac{11}{3}. \\ 5, 0; 0, -5. \\ -\frac{7}{3}, 0; 0, -\frac{7}{5}. \\ -\frac{11}{4}, 0; 0, \frac{11}{6}. \\ 7, 0; 0, 7. \end{array} \right.$$

Die geraden Linien 1) und 8) laufen parallel und stehen senkrecht auf der geraden Linie 5, welche mit der x -Axe einen Winkel von 45° macht. Die Winkel, welche die entsprechenden geraden Linien mit der x -Axe bilden, sind gegeben durch

$$\begin{array}{l} 2) \ \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{17}, \quad 3) \ \operatorname{tg} \varphi = 11, \quad 4) \ \operatorname{tg} \varphi = \frac{7}{3}, \quad 6) \ \operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{5}, \\ 7) \ \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 69. \ \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}}, \ \frac{x}{\sqrt{37}} = \frac{6y}{\sqrt{37}}, \ \frac{y}{\sqrt{10}} = \frac{3x}{\sqrt{10}}, \ \frac{5x}{\sqrt{34}} = \frac{3y}{\sqrt{34}}, \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{17}{\sqrt{2}}, \ \frac{x}{\sqrt{290}} + \frac{17y}{\sqrt{290}} = \frac{300}{\sqrt{290}}, \ \frac{11x}{\sqrt{122}} - \frac{y}{\sqrt{122}} = \frac{104}{\sqrt{122}}, \\ -\frac{7x}{\sqrt{58}} + \frac{3y}{\sqrt{58}} = \frac{11}{\sqrt{58}}, \ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}, \ -\frac{3x}{\sqrt{34}} - \frac{5y}{\sqrt{34}} = \frac{7}{\sqrt{34}}, \\ -\frac{2x}{\sqrt{13}} + \frac{3y}{\sqrt{13}} = \frac{11}{2\sqrt{13}}, \ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}. \end{array}$$

70.

$$1) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ x - y + 6 = 0, \\ 3x - 2y + 1 = 0; \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \sqrt{18}, \\ -\frac{3x}{\sqrt{13}} + \frac{2y}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y + 4 = 0, \\ 8x - 5y - 19 = 0, \\ 5x - 2y - 13 = 0; \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \\ \frac{8x}{\sqrt{89}} - \frac{5y}{\sqrt{89}} = \frac{19}{\sqrt{89}}, \\ \frac{5x}{\sqrt{29}} - \frac{2y}{\sqrt{29}} = \frac{13}{\sqrt{29}}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 5x - 2y + 11 = 0, \\ 3x - 2y + 1 = 0; \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \\ -\frac{2x}{\sqrt{29}} + \frac{2y}{\sqrt{29}} = \frac{11}{\sqrt{29}}, \\ -\frac{3x}{\sqrt{13}} + \frac{2y}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y = 4, \\ x = 3, \\ 4x + 3y = 0; \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} y = 4, \\ x = 3, \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = 0; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + y = 3, \\ x + 8y + 11 = 0, \\ 2x - 5y + 1 = 0; \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{x}{\sqrt{65}} - \frac{8y}{\sqrt{65}} = \frac{11}{\sqrt{65}}, \\ -\frac{2x}{\sqrt{29}} + \frac{5y}{\sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{29}}; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + y = 9, \\ 2x - 5y + 10 = 0, \\ x + 8y = 16; \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{2x}{\sqrt{29}} + \frac{5y}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}}, \\ \frac{x}{\sqrt{65}} + \frac{8y}{\sqrt{65}} = \frac{16}{\sqrt{65}} \end{cases}$$

$$71. \quad \begin{vmatrix} x - a', y - b', 1 \\ a - a', b - b', 1 \\ a'' - a', b'' - b', \frac{p+q}{q} \end{vmatrix} = 0.$$

Ist $a = a'$, $b = b'$, so ist die Gleichung:

$$(b' - b'')x + (a' - a'')y + a'b'' - a''b' = 0.$$

$$72. (b' + b'' - 2b)x - (a' + b'' - 2a)y + a'b - ab' + a''b - ab'' = 0.$$

$$73. \quad \begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x = 7, \\ 4x - 3y + 7 = 0, \\ 5x - 3y = 0; \end{cases} & 2) \begin{cases} 2x + y - 25 = 0, \\ 11x - 8y - 7 = 0, \\ 13x - 7y - 32 = 0; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 11x - 2y + 17 = 0, \\ 19x - 10y + 25 = 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} 4x - 3y = 0, \\ 2x + 3y - 6 = 0, \\ 8x + 3y - 12 = 0; \end{cases} \\ 5) \begin{cases} 5x - 2y - 8 = 0, \\ 4x + 11y + 2 = 0, \\ x - 13y - 10 = 0; \end{cases} & 6) \begin{cases} 5x - 2y - 17 = 0, \\ 4x + 11y - 43 = 0, \\ x - 13y + 26 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$74. \quad 1) \left(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{14}, -\frac{19}{14}\right).$$

$$2) (2, 3). \quad 3) \left(-13\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}\right), (-1, +3), (-2, 1).$$

$$4) (x, y). \quad 5) \left(\frac{10}{71}, \frac{32}{71}\right). \quad 6) (57, -34).$$

$$7) (23, 19). \quad 8) \left(-2\frac{1}{5}, -7\frac{1}{5}\right), \left(2, -4\frac{2}{19}\right), \left(12\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right).$$

$$9) \left(\frac{20}{41}, -\frac{29}{41}\right), \left(1\frac{9}{11}, \frac{1}{11}\right), \left(\frac{20}{29}, -1\frac{12}{29}\right).$$

$$10) \left(\frac{20}{41}, -\frac{29}{41}\right). \quad 11) \left(\frac{10}{71}, \frac{32}{71}\right).$$

$$12) (11, 6), \left(10\frac{1}{9}, 6\frac{2}{3}\right), \left(10\frac{3}{7}, 6\frac{2}{7}\right).$$

Jenachdem man den kleineren oder grösseren Winkel, den die betreffenden Linien bilden, nimmt, hat man bei den folgenden Werten, welche die trigonometrischen Tangenten der Winkel sind, das positive oder negative Zeichen zu nehmen:

- 1) $\frac{1}{2}, 7, 3.$ 2) $2\frac{5}{21}, 1\frac{18}{29}, 1\frac{15}{32}.$ 3) $\frac{3}{19},$ unendlich gross, $\frac{19}{3}.$
 4) 0. 5) $5\frac{11}{12}.$ 6) $\frac{1}{34}, \frac{1}{123}, \frac{1}{47}.$
 7) $4\frac{23}{72}.$ 8) $\frac{5}{33}, \frac{133}{655}, \frac{1}{10}.$ 9) $3\frac{8}{11}, 1\frac{7}{22}, \frac{11}{27}.$
 10) $1\frac{18}{23}, 4\frac{6}{19}, \frac{41}{45}.$ 11) $5\frac{11}{12}.$ 12) $\frac{2}{11}, \frac{9}{38}, \frac{7}{16}.$

75. 1) $\left(-1, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{50}{9}, \frac{61}{9}\right), \left(\frac{88}{111}, -\frac{305}{111}\right), \left(-\frac{184}{61}, \frac{29}{61}\right).$
 $1387x + 398y = 6, 1730x - 2353y + 6337 = 0.$

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel des Vierecks, abgesehen vom Vorzeichen, sind: $\frac{4}{7}, \frac{3}{4}, 4\frac{1}{9}, 8\frac{5}{7}.$

2) $\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right), \left(\frac{1}{13}, 1\frac{8}{13}\right), \left(-\frac{65}{86}, 1\frac{6}{43}\right), \left(1\frac{2}{17}, \frac{2}{17}\right).$
 $232x + 1013y = 979, 331x + 230y = 397.$

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel des Vierecks, abgesehen vom Vorzeichen, sind: $5, 2, 1\frac{33}{53}, 3\frac{2}{5}.$

76. 1) $\left(\frac{83}{2}, \frac{259}{4}\right), \left(-\frac{71}{10}, \frac{101}{20}\right).$

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel des Vierecks, abgesehen vom Vorzeichen, sind: $8, 10\frac{1}{2}, 6\frac{8}{13}, 8\frac{1}{4}.$

2) $\left(8\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2}\right), \left(4\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right).$

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel des Vierecks, abgesehen vom Vorzeichen, sind: $2, \frac{7}{6}, \frac{1}{13}, \frac{1}{3}.$

77. 1) $162y - 199x = 2231;$ 2) $67x + 39y - 316 = 0.$

78. 1) $3x + 6y + m = 0$ } die gegebenen geraden Linien
 2) $2x + y + n = 0$ } sind resp. parallel.
 3) $\sqrt{2}(2x + y + 2) = \sqrt{5}(x + y + 5);$
 4) $-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - 1\right) = y - x;$

$$5) \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y + 1 \right) = -x - y;$$

$$6) \sqrt{200} (x + 7y + 8) = \sqrt{50} (2x + 14y + 5);$$

$$7) y = 0;$$

$$8) x - y + \frac{3}{4} = 0;$$

$$9) x (\cos 18 - \cos 36) + y (\sin 18 - \sin 36) - 4\frac{1}{2} = 0;$$

10) Die beiden geraden Linien gehen parallel;

$$11) \sqrt{5} (5x + y + 5) = \sqrt{26} (2x + y + 1);$$

$$12) x (\sqrt{3} + 1) = y (\sqrt{3} - 1).$$

Die trigonometrischen Tangenten der von den Linienpaaren eingeschlossenen Winkel sind:

$$0, 0, \frac{1}{3}, \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}}, 0, \infty, \frac{12}{5}, \operatorname{tg} 18, 0, \frac{3}{11}, \infty.$$

79. 1) Haben die Seiten des Dreiecks die Gleichungen:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 = A_1$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p' = 0 = A_2$$

$$x \cos \gamma + y \sin \gamma - p'' = 0 = A_3,$$

so sind die Gleichungen der Halbierungslinien der Winkel:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = x \cos \beta + y \sin \beta - p'$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p' = x \cos \gamma + y \sin \gamma - p''$$

$$x \cos \gamma + y \sin \gamma - p'' = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p.$$

Diesen Gleichungen genügt der Punkt:

$$x = \frac{(p - p') (\sin \beta - \sin \gamma) - (p' - p'') (\sin \alpha - \sin \beta)}{(\cos \alpha - \cos \beta) (\sin \beta - \sin \gamma) - (\cos \beta - \cos \gamma) (\sin \alpha - \sin \beta)}$$

$$-y = \frac{(p - p') (\cos \beta - \cos \gamma) - (p' - p'') (\cos \alpha - \cos \beta)}{(\cos \alpha - \cos \beta) (\sin \beta - \sin \gamma) - (\cos \beta - \cos \gamma) (\sin \alpha - \sin \beta)}.$$

2) Die Gleichungen für diesen Fall erhält man, wenn man in 1) statt $\cos \gamma$, $\sin \gamma$, p'' die negativen Werte $-\cos \gamma$, $-\sin \gamma$, $-p''$ einführt.

3) Die Gleichung der Geraden, welche den Aussenwinkel von A_1 und A_2 halbiert, ist

$$A_1 + A_2 = 0,$$

diese Gerade schneidet die Seite A_3 in dem Punkte:

$$-y_1 = \frac{(p + p') \cos \gamma - (\cos \alpha + \cos \beta) p''}{\sin (\beta - \gamma) - \sin (\gamma - \alpha)},$$

$$x_1 = \frac{(p + p') \sin \gamma - (\sin \alpha + \sin \beta) p''}{\sin (\beta - \gamma) - \sin (\gamma - \alpha)}.$$

Ebenso erhält man auf der Seite A_1 den Punkt:

$$-y_2 = \frac{(p'' + p') \cos \alpha - (\cos \gamma + \cos \beta) p}{\sin (\beta - \alpha) - \sin (\alpha - \gamma)},$$

$$x_2 = \frac{(p'' + p') \sin \gamma - (\sin \gamma + \sin \beta) p}{\sin (\beta - \alpha) - \sin (\alpha - \gamma)},$$

und auf A_2 den Punkt:

$$-y_3 = \frac{(p + p'') \cos \beta - (\cos \alpha + \cos \gamma) p'}{\sin (\gamma - \beta) - \sin (\beta - \alpha)},$$

$$x_3 = \frac{(p + p'') \sin \beta - (\sin \alpha + \cos \gamma) p'}{\sin (\gamma - \beta) - \sin (\beta - \alpha)}.$$

Da drei Punkte $x_1, y_1; x_2, y_2, x_3, y_3$ in einer geraden Linie liegen, wenn ist:

$$y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2) = 0,$$

so muss man obige Werte in diese Gleichung einsetzen und man wird sehen, dass sie identisch zu Null wird.

4) Um diesen Satz zu beweisen, setze man in 3 statt $\cos \beta$, $\sin \beta$, p' die Grössen $-\cos \beta$, $-\sin \beta$, $-p'$.

5) Sind die Koordinaten der Ecken des Dreiecks x', y' ; x'', y'' ; x''', y''' , so haben die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseite des Dreiecks die Gleichungen:

$$(y'' + y''' - 2y')x - (x'' + x''' - 2x')y + x''y' - x'y'' + x'''y' - x'y''' = 0,$$

$$(y''' + y' - 2y'')x - (x''' + x' - 2x'')y + x'''y'' - x''y''' + x'y'' - x''y' = 0,$$

$$(y' + y'' - 2y''')x - (x' + x'' - 2x''')y + x'y''' - x'''y' + x''y''' - x'''y'' = 0.$$

Diesen drei Gleichungen genügt der Punkt

$$x = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$$

6) Sind wie in 5) die Koordinaten der Ecken gegeben, so sind die Gleichungen der Senkrechten in den Seitenmittelpunkten:

$$(x'' - x''') x + (y'' - y''') y = \frac{1}{2} (x''^2 - x'''^2) + \frac{1}{2} (y''^2 - y'''^2),$$

$$(x''' - x') x + (y''' - y') y = \frac{1}{2} (x'''^2 - x'^2) + \frac{1}{2} (y'''^2 - y'^2),$$

$$(x' - x'') x + (y' - y'') y = \frac{1}{2} (x'^2 - x''^2) + \frac{1}{2} (y'^2 - y''^2).$$

Diesen Gleichungen genügt der Punkt:

$$y = \frac{1}{2} \frac{(x''^2 - x'''^2 + y''^2 - y'''^2)(x''' - x') - (x'''^2 - x'^2 + y'''^2 - y'^2)(x'' - x''')}{(x''' - x')(y'' - y''') - (x'' - x''')(y''' - y')},$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{(x''^2 - x'''^2 + y''^2 - y'''^2)(y''' - y') - (x'''^2 - x'^2 + y'''^2 - y'^2)(y'' - y''')}{(x'' - x''')(y''' - y') - (x''' - x')(y'' - y''')}.$$

7) Die Gleichungen der Perpendikel sind durch die Koordinaten der Ecken ausgedrückt:

$$(x'' - x''') x + (y'' - y''') y = (x' x'' + y' y'') - (x' x''' + y' y'''),$$

$$(x''' - x') x + (y''' - y') y = (x'' x''' + y'' y''') - (x'' x' + y'' y'),$$

$$(x' - x'') x + (y' - y'') y = (x''' x' + y''' y') - (x'' x''' + y'' y''').$$

Diesen drei Gleichungen genügt der Punkt:

$$x = \frac{(x' x'' + y' y'')(y'' - y') - (x' x''' + y' y''')(y''' - y') - (x'' x''' + y'' y''')(y'' - y''')}{(x'' - x''')(y''' - y') - (x''' - x')(y'' - y''')},$$

$$y = \frac{(x' x'' + y' y'')(x'' - x') - (x' x''' + y' y''')(x''' - x') - (x'' x''' + y'' y''')(x'' - x''')}{(x''' - x')(y'' - y''') - (x'' - x''')(y''' - y')}.$$

Sind die Gleichungen der Seiten des Dreiecks wie in 1) und liegt der Seite A_1 der Winkel α_1 , der Seite A_2 der Winkel α_2 und der Seite A_3 der Winkel α_3 gegenüber, so sind die Gleichungen der drei Perpendikel:

$$0 = x (\cos \alpha \cos \alpha_1 - \cos \beta \cos \alpha_2) + y (\sin \alpha \cos \alpha_1 - \sin \beta \cos \alpha_2) - (p \cos \alpha_1 - p' \cos \alpha_2),$$

$$0 = x (\cos \beta \cos \alpha_2 - \cos \gamma \cos \alpha_3) + y (\sin \beta \cos \alpha_2 - \sin \gamma \cos \alpha_3) - (p' \cos \alpha_2 - p'' \cos \alpha_3),$$

$$0 = x (\cos \gamma \cos \alpha_3 - \cos \alpha \cos \alpha_1) + y (\sin \gamma \cos \alpha_3 - \sin \alpha \cos \alpha_1) - (p'' \cos \alpha_3 - p \cos \alpha_1)$$

und für den Schnittpunkt erhält man die Koordinaten:

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{C'A - A'C}{BA' - AB'},$$

wenn man setzt:

$$\begin{aligned} A &= \cos \alpha \cos a_1 - \cos \beta \cos a_2, & B &= \sin \alpha \cos a_1 - \sin \beta \cos a_2, \\ A' &= \cos \beta \cos a_2 - \cos \gamma \cos a_3, & B' &= \sin \beta \cos a_2 - \sin \gamma \cos a_3, \\ C &= p' \cos a_2 - p \cos a_1, & C' &= p'' \cos a_3 - p' \cos a_2. \end{aligned}$$

Werden in 5) zwei Seiten des Dreiecks, deren Länge a und b sind, als Axen genommen, so heissen die entsprechenden Gleichungen:

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

denen genügt wird durch den Punkt

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{b}{3}.$$

80. 1. Sind die Koordinaten der Spitze $(0, y')$ und die der Basisecken $(x', 0)$, $(-x', 0)$, so sind die Basis des Dreiecks und die von der Spitze auf die Basis gefällte Senkrechte die Axen. Setzt man $p = x' \cos \alpha$, $p = y' \sin \alpha$, so findet man, dass in Aufg. 79

1) der Schnittpunkt der Halbierungslinien der Winkel die Koordinaten

$$x_3 = 0, \quad y_3 = y' \frac{p}{p + y'}$$

hat und dass die Gleichungen dieser Geraden

$$x = 0, \quad xy_3 + yx' - x'y_3 = 0, \quad xy_3 - yx' + x'y_3 = 0$$

sind;

2) der Schnittpunkt der Halbierungslinien der beiden Aussenwinkel an der Basis ist

$$x_4 = 0, \quad y_4 = -\frac{x'^2}{y^3};$$

3) die Linie, welche den Aussenwinkel an der Spitze halbiert, der Basis parallel ist und dass die beiden anderen Geraden die Gegenseiten in den Punkten

$$x_1 = x' \frac{y_4 - y'}{y_4 + y'}, \quad y_1 = 2y' \frac{y_4}{y_4 + y'}; \quad x = -x_1, \quad y = y_1$$

schneiden;

4) leicht aus 2) und 3) folgt;

5) die Geraden die Gleichungen

$$x = 0, \quad y'x + 3x'y - x'y' = 0, \quad y'x - 3x'y + x'y' = 0$$

haben und sich im Punkte $\left(0, \frac{y'}{3}\right)$ schneiden;

6) die Geraden die Gleichungen

$$x = 0, \quad x'x + y'y = -\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2), \quad x'x - y'y = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)$$

haben und sich im Punkte $\left(0, \frac{y'^2 - x'^2}{2y'}\right)$ schneiden;

7) die Geraden die Gleichungen

$$x = 0, \quad x'x + y'y - x'^2 = 0, \quad x'x - y'y + x'^2 = 0$$

und sich im Punkte $\left(0, \frac{x'^2}{y'}\right)$ schneiden.

2. Sind die Koordinaten der Spitze $(0, y')$ und die der Basisecken $(x'', 0)$, $(x''', 0)$, so sind die Basis des Dreiecks und die von der Spitze auf die Basis gefällte Senkrechte die Axen. Setzt man $p = x'' \cos \alpha = y' \sin \alpha$, $p'' = x''' \cos \gamma = y' \sin \gamma$, so sind in Aufg. 79

1) die Gleichungen der Winkelhalbierenden

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p &= -y, \\ x \cos \gamma + y \sin \gamma - p'' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha - p, \\ &= x \cos \gamma + y \sin \gamma - p''; \end{aligned}$$

2) die Gleichungen der Halbierungslinien zweier äusseren und des dritten inneren Winkels

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p &= -y, \\ -x \cos \gamma - y \sin \gamma + p'' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha - p, \\ &= x \cos \gamma + y \sin \gamma - p'' \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p &= y, \\ -x \cos \gamma - y \sin \gamma + p'' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha - p, \\ &= x \cos \gamma - y \sin \gamma - p''; \end{aligned}$$

3) die Gleichungen der Halbierungslinien der Aussenwinkel

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p &= y, \\ -x \cos \gamma - y \sin \gamma + p'' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha - p, \\ &= x \cos \gamma + y \sin \gamma - p''; \end{aligned}$$

4) die Gleichungen der Halbierungslinien zweier inneren und des dritten Aussenwinkels

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p &= -y, \\ -x \cos \gamma - y \sin \gamma + p'' &= y, \\ x \cos \gamma + y \sin \gamma + p'' &= -x \cos \alpha - y \sin \alpha + p; \end{aligned}$$

5) die Gleichungen der betreffenden Verbindungslinien

$$\begin{aligned} -2y'x - (x'' + x''')y + x''y' + x'''y' &= 0, \\ y'x - (x''' - 2x'')y - x''y' &= 0, \\ y'x - (x'' - 2x''')y - x'''y' &= 0, \end{aligned}$$

welche sich in dem Punkt $\left(\frac{x'' + x'''}{3}, \frac{y'}{3}\right)$ schneiden;

6) die Gleichungen der betreffenden Senkrechten

$$2x = x'' + x''', \quad x'''x - y'y = \frac{1}{2}(x'''^2 - y'^2), \quad y'y - x''x = \frac{1}{2}(y'^2 - x''^2),$$

welche sich in dem Punkt $\left(\frac{x'' + x'''}{2}, \frac{y'^2 + x''x'''}{2}\right)$ schneiden;

7) die Gleichungen der von den Ecken auf die Seiten gefällten Senkrechten:

$$x = 0, \quad x'''(x - x'') = yy', \quad x''(x''' - x) + y'y = 0,$$

welche sich in dem Punkt $\left(0, -\frac{x''x'''}{y'}\right)$ schneiden.

3, 4, 5, 6) Die Gleichungen der Seiten der Dreiecke sind:

$$\begin{aligned} 3) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 6, \\ 8x + 2y + 1 = 0, \\ 16x - 10y = 33; \end{array} \right. & \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + 7 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0, \\ 3x + y - 2 = 0; \end{array} \right. \\ 5) \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 7 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0, \\ x + 7y + 11 = 0; \end{array} \right. & \quad 6) \left\{ \begin{array}{l} 4x + y - 11 = 0, \\ 9x - 5y - 3 = 0, \\ x - 7y - 39 = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Wie man den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bestimmt, soll an dem Dreieck 3) gezeigt werden. Man bringe die Gleichungen der Seiten auf die Normalform:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}} = 0, \\ -\frac{4x}{\sqrt{17}} - \frac{y}{\sqrt{17}} - \frac{1}{2\sqrt{17}} = 0, \\ \frac{8x}{\sqrt{89}} - \frac{5y}{\sqrt{89}} - \frac{33}{2\sqrt{89}} = 0, \end{array} \right.$$

und man erhält für den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden die Koordinaten:

$$x = \frac{\left(\frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{17}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{5}{\sqrt{89}}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{17}} - \frac{33}{2\sqrt{89}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{5}{\sqrt{89}}\right) + \left(\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{8}{\sqrt{89}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\right)},$$

$$-y = \frac{\left(\frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{17}}\right)\left(-\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{8}{\sqrt{89}}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{17}} - \frac{33}{2\sqrt{89}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{5}{\sqrt{89}}\right) + \left(\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{8}{\sqrt{89}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\right)}.$$

Die Verbindungslinien der Mitten der Seiten mit den Ecken schneiden sich in den resp. Punkten:

$$3) \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right), 4) \left(-\frac{19}{385}, 2\frac{167}{385}\right), 5) \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), 6) \left(1, -2\frac{2}{3}\right).$$

Die Senkrechten in den Seitenmitten haben resp. die Gleichungen:

$$3) \begin{cases} 2x - y = -\frac{1}{2}, \\ 2x - 8y = -\frac{9}{2}, \\ 10x + 16y = \frac{19}{2}; \end{cases} 4) \begin{cases} 3x + 2y = +\frac{368}{77}, \\ 2x - y = -\frac{18}{7}, \\ x - 3y = -\frac{82}{11}; \end{cases} 5) \begin{cases} 7x - y + 2 = 0, \\ 3x + y + 3 = 0, \\ 3y - x + 4 = 0; \end{cases} 6) \begin{cases} 7x + y + 2 = 0, \\ 5x + 9y + 16 = 0, \\ x - 4y = 7; \end{cases}$$

diese Geraden haben die resp. Schnittpunkte

$$3) \left(\frac{1}{28}, \frac{4}{7}\right), 4) \left(-\frac{4}{77}, \frac{190}{77}\right), 5) \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), 6) \left(-\frac{1}{29}, -\frac{51}{29}\right)$$

gemein.

Die Gleichungen der Perpendikel von den Ecken auf die Gegenseiten sind:

$$3) \begin{cases} 2x - y = \frac{7}{2}, \\ x - 4y = -3, \\ 5x + 8y = 23; \end{cases} 4) \begin{cases} 3x + 2y = \frac{23}{5}, \\ 2x - y = -\frac{27}{11}, \\ x - 3y = -\frac{50}{7}; \end{cases} 5) \begin{cases} 7x - y = 13, \\ 3x + y = 7, \\ 3y - x = 1; \end{cases} 6) \begin{cases} 7x + y = 17, \\ 5x + 9y + 25 = 0, \\ x - 4y = 21; \end{cases}$$

und die Schnittpunkte der betreffenden Höhen sind:

$$3) \left(\frac{17}{7}, \frac{19}{14}\right), 4) \left(-\frac{17}{385}, \frac{911}{385}\right), 5) (2, 1), 6) \left(\frac{89}{29}, -\frac{130}{29}\right);$$

das Dreieck 5) ist rechtwinklig, was sich auch aus den Gleichungen der Seiten sofort ergibt.

81. Das Dreieck 3) hat die Ecken des Dreiecks 5) der Aufg. 80. Die Dreiecke 5, 6 sind rechtwinklig. Die Koordinaten der Dreiecksecken sind

$$1) \quad \left(-1, \frac{7}{2}\right), \quad \left(3, \frac{3}{2}\right), \quad \left(83, \frac{259}{2}\right);$$

$$2) \quad \left(-\frac{9}{25}, \frac{47}{50}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right), \quad \left(-3, \frac{1}{2}\right);$$

$$4) \quad \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{14}, -\frac{19}{14}\right), \quad \left(\frac{17}{2}, -\frac{13}{2}\right);$$

$$5) \quad \left(-\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{7}, \frac{17}{7}\right), \quad \left(-\frac{8}{13}, \frac{25}{13}\right);$$

$$6) \quad \left(\frac{17}{5}, \frac{16}{5}\right), \quad \left(\frac{22}{7}, \frac{23}{7}\right), \quad \left(\frac{38}{11}, \frac{37}{11}\right).$$

Die Senkrechten in den Seitenmitten haben resp. die Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} 3y + 2x = \frac{563}{2}, \\ 2x - y = -\frac{1}{2}, \\ 8y + 5x = 739; \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} 6x + y = -\frac{234}{25}, \\ 2x - 8y = \frac{319}{50}, \\ 14x - 12y = -\frac{11}{2}; \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} x - y = 9, \\ 3x + y = \frac{19}{7}, \\ 5x - 3y = \frac{230}{7}; \end{cases} \quad 5) \quad \begin{cases} 2x - 3y = -\frac{79}{8}, \\ 2x - y = -\frac{235}{56}, \\ 3x + 2y = \frac{663}{182}; \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} 3x - y = \frac{46}{7}, \\ x + 3y = \frac{146}{11}, \\ 4x + y = \frac{1272}{77}. \end{cases}$$

Die Senkrechten von den Ecken auf die Gegenseiten haben die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{l} 3y + 2x = \frac{21}{2}, \\ 2x - y = \frac{73}{2}, \\ 8y + 5x = 23; \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} 6x + y = \frac{1}{2}, \\ x - 4y + 5 = 0, \\ 7x - 6y + \frac{204}{25} = 0; \end{array} \right. \\
 4) \left\{ \begin{array}{l} 7x - 7y - 9 = 0, \\ 3x + y - 19 = 0, \\ 5x - 3y - 14 = 0; \end{array} \right. & 5) \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + 7 = 0, \\ 26x - 13y + 41 = 0, \\ 3x + 2y - 2 = 0; \end{array} \right. \\
 & 6) \left\{ \begin{array}{l} 3x - y - 7 = 0, \\ x + 3y = 13, \\ 20x + 5y = 84; \end{array} \right.
 \end{array}$$

82. $1, 9 \cdot \sqrt{2}$. 83. $10 : \sqrt{82}$.

84. Die Gleichungen der drei Senkrechten sind:

$$y + x = 1, \quad 2x - y = 0, \quad 7x - 2y = 1,$$

und ihre entsprechenden Längen

$$4, 5 \cdot \sqrt{2}, \quad \frac{3}{5}\sqrt{5}, \quad \frac{9}{53}\sqrt{53}.$$

85. 1) $\frac{429}{190}, \frac{143}{65}, \frac{39}{\sqrt{85}}$; 2) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{17}\sqrt{34}$.

86. 5. 87. Null.

88. Die Dreiecke der Aufg. 70 haben den doppelten Inhalt:

1) 16; 2) 36; 3) 24; 4) 48; 5) 21; 6) 21;

und die Dreiecke der Aufg. 80 haben den doppelten Inhalt:

1) $2y'x'$; 2) $y'(x'' - x''')$; 3) 21; 4) $\frac{36}{385}$; 5) 20; 6) 58.

89. Die Dreiecke der Aufg. 74 haben den doppelten Inhalt:

1) $3\frac{3}{7}$, 3) $31\frac{2}{3}$, 8) $16\frac{47}{190}$, 9) $1\frac{1321}{13079}$, 12) $\frac{8}{63}$;

die Dreiecke der Aufg. 81 haben den doppelten Inhalt:

1) 672, 2) $9\frac{23}{50}$, 3) 20, 4) $20\frac{4}{7}$, 5) $1\frac{165}{364}$, 6) $\frac{18}{385}$;

die Dreiecke der Aufg. 85 haben den doppelten Inhalt:

1) $9\frac{149}{190}$, 2) 2.

90. Die Gleichung der durch x' , y' und S gehenden geraden Linie ist

$$(ax + by + c) (a'x' + b'y' + c') = (ax' + by' + c) (a'x + b'y + c').$$

Die Gleichung der Linie P (x' , y') ist

$$a(x - x') + b(y - y') + \operatorname{tg} \alpha \{b(x - x') - a(y - y')\} = 0.$$

Setzt man $a'x' + b'y' + c' = A$, $ax' + by' + c = B$, so ist der doppelte Inhalt des Dreiecks

$$B \operatorname{tg} \alpha \begin{vmatrix} a, & b, & B \\ a', & b', & A \\ b, & -a, & -\frac{B}{\operatorname{tg} \alpha} \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & -a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} aA - a'B, & bA - b'B \\ a + b \operatorname{tg} \alpha, & b - a \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix}.$$

91. $a(x - x') + b(y - y') = 0.$

92. Wenn man die untereinanderstehenden Zahlen als zugehörige nimmt, so sind die Gleichungen der Dreiecksseiten:

$$1) \begin{cases} x + 5y + 6 = 0, \\ 7x + 17y = 0, \\ 5x - y = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 7y - 8 = 0, \\ 165x + 16y - 112 = 0, \\ 5x + 2y = 14; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x + 9y + 5 = 0, \\ 5x - 51y - 25 = 0, \\ x(5 + 9 \operatorname{tg} 30^\circ) + y(9 - 5 \operatorname{tg} 30^\circ) = 25 + 45 \operatorname{tg} 30^\circ; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 7x + 11y - 4 = 0, \\ 121x - 179y + 232 = 0, \\ x(7 + 11 \operatorname{tg} 18^\circ) + y(11 - 7 \operatorname{tg} 18^\circ) = 76 - 2 \operatorname{tg} 18^\circ; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 7x + 2y - 3 = 0, \\ 7x + 838y - 915 = 0, \\ x(7 + 2 \operatorname{tg} 15^\circ) + y(2 - 7 \operatorname{tg} 15^\circ) = 79 + 15 \operatorname{tg} 15^\circ; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5x + 4y - 10 = 0, \\ 13x + 44y - 101 = 0, \\ x(5 + 4 \operatorname{tg} 20^\circ) + y(4 - 5 \operatorname{tg} 20^\circ) = 13 - 6 \operatorname{tg} 20^\circ; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 3x + 8y + 11 = 0, \\ x(3 + 8 \operatorname{tg} 60^\circ) + y(8 - 3 \operatorname{tg} 60^\circ) = 65 + 3 \operatorname{tg} 60^\circ, \\ 1039x - 472y + 187 = 0; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x + 9y + 13 = 0, \\ 91x - 136y - 434 = 0, \\ x(1 + 9 \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^\circ) + y(9 - \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^\circ) + 68 + 38 \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^\circ = 0. \end{cases}$$

Setzt man in Aufg. 91 die entsprechenden Werte, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x + 5y + 6 = 0, \\ x + 5y = 0; \end{cases} & 2) \begin{cases} 3x + 7y - 8 = 0, \\ 3x + 7y - 49 = 0; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 5x + 9y + 5 = 0, \\ 5x + 9y - 25 = 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} 7x + 11y - 4 = 0, \\ 7x + 11y - 76 = 0; \end{cases} \\ 5) \begin{cases} 7x + 2y - 3 = 0, \\ 7x + 2y - 79 = 0; \end{cases} & 6) \begin{cases} 5x + 4y = 10, \\ 5x + 4y = 13; \end{cases} \\ 7) \begin{cases} 3x + 8y + 11 = 0, \\ 3x + 8y - 65 = 0; \end{cases} & 8) \begin{cases} x + 9y + 13 = 0, \\ x + 9y + 68 = 0. \end{cases} \end{array}$$

Der doppelte Inhalt der Dreiecke ist: 1) $7 \frac{1}{13}$; 2) $13 \frac{71}{783}$;

$$\begin{array}{l} 3) \left| \begin{array}{ccc} 5, & 9, & 5 \\ 5, & -51, & -25 \\ 9 \operatorname{tg} 30^\circ, & -5 \operatorname{tg} 30^\circ, & -30 + 45 \operatorname{tg} 30^\circ \end{array} \right|^2 : \left| \begin{array}{cc} 5, & 9 \\ 5, & -51 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 5, & 9 \\ 9, & -5 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 5 \operatorname{tg} 30^\circ, & -51 \operatorname{tg} 30^\circ \\ 5 + 9 \operatorname{tg} 30^\circ, & 9 - 5 \operatorname{tg} 30^\circ \end{array} \right|; \\ 4) \left| \begin{array}{ccc} 7, & 11, & -4 \\ 121, & -179, & 232 \\ 11 \operatorname{tg} 18^\circ, & -7 \operatorname{tg} 18^\circ, & -72 + 2 \operatorname{tg} 18^\circ \end{array} \right|^2 : \left| \begin{array}{cc} 7, & 11 \\ 121, & -179 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 7, & 11 \\ 11, & -7 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 121 \operatorname{tg} 18^\circ, & -179 \operatorname{tg} 18^\circ \\ 7 + 11 \operatorname{tg} 18^\circ, & 11 - 7 \operatorname{tg} 18^\circ \end{array} \right|; \\ 5) \left| \begin{array}{ccc} 7, & 2, & -3 \\ 7, & 838, & -915 \\ 2 \operatorname{tg} 15^\circ, & -7 \operatorname{tg} 15^\circ, & -76 - 15 \operatorname{tg} 15^\circ \end{array} \right|^2 : \left| \begin{array}{cc} 7, & 2 \\ 7, & 838 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 7, & 2 \\ 2, & -7 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 7 \operatorname{tg} 15^\circ, & 838 \operatorname{tg} 15^\circ \\ 7 + 2 \operatorname{tg} 15^\circ, & 2 - 7 \operatorname{tg} 15^\circ \end{array} \right|; \\ 6) \left| \begin{array}{ccc} 5, & 4, & -10 \\ 13, & 44, & -101 \\ 4 \operatorname{tg} 20^\circ, & -5 \operatorname{tg} 20^\circ, & -3 + 6 \operatorname{tg} 20^\circ \end{array} \right|^2 : \left| \begin{array}{cc} 5, & 4 \\ 13, & 44 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 5, & 4 \\ 4, & -5 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 13 \operatorname{tg} 20^\circ, & 44 \operatorname{tg} 20^\circ \\ 5 + 4 \operatorname{tg} 20^\circ, & 4 - 5 \operatorname{tg} 20^\circ \end{array} \right|; \\ 7) \left| \begin{array}{ccc} 3, & 8, & 11 \\ 1039, & -472, & 187 \\ 8 \operatorname{tg} 60^\circ, & -3 \operatorname{tg} 60^\circ, & -76 - 3 \operatorname{tg} 60^\circ \end{array} \right|^2 : \left| \begin{array}{cc} 3, & 8 \\ 1039, & -472 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 3, & 8 \\ 8, & -3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 1039 \operatorname{tg} 60^\circ, & -472 \operatorname{tg} 60^\circ \\ 3 + 8 \operatorname{tg} 60^\circ, & 8 - 3 \operatorname{tg} 60^\circ \end{array} \right|; \\ 8) \left| \begin{array}{ccc} 1, & 9, & 13 \\ 91, & -136, & -434 \\ 9 \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^\circ, & -\operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^\circ, & 55 + 38 \operatorname{tg} 22\frac{1}{2}^\circ \end{array} \right|^2 : \left| \begin{array}{cc} 1, & 9 \\ 91, & -136 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 1, & 9 \\ 9, & -1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 91 \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}, & -136 \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} \\ 1 + 9 \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}, & 9 - \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} \end{array} \right|. \end{array}$$

93. Der Beweis beruht auf passender Addition und Subtraktion der Gleichungen in Lös. 79.

Die Gleichungen der Seiten des Dreiecks seien in der Normalform $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Die Gleichungen der Halbierungslinien der Winkel sind

$$A_1 - A_2 = 0, \quad A_2 - A_3 = 0, \quad A_3 - A_1 = 0.$$

Die Gleichungen der die Aussenwinkel halbirenden geraden Linien sind

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A_2 + A_3 = 0, \quad A_3 + A_1 = 0.$$

Wenn den Linien A_1, A_2, A_3 resp. die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gegenüberliegen, so sind die Gleichungen der drei Höhen $A_1 \cos \alpha_1 - A_2 \cos \alpha_2 = 0, A_2 \cos \alpha_2 - A_3 \cos \alpha_3 = 0, A_3 \cos \alpha_3 - A_1 \cos \alpha_1 = 0$.

$$94. \quad x = \frac{(Aa + Bb + C) a' - (Aa' + Bb' + C) a}{(Aa + Bb + C) - (Aa' + Bb' + C)},$$

$$y = \frac{(Aa + Bb + C) b' - (Aa' + Bb' + C) b}{(Aa + Bb + C) - (Aa' + Bb' + C)}.$$

$$95. \quad \frac{m}{n} = - \frac{(b'' - b''') x' - (a'' - a''') y' + a'' b''' - a''' b''}{(b'' - b''') a' - (a'' - a''') b' + a'' b''' - a''' b''}.$$

96. Nimmt man aus Aufg. 92 folgende Werte für die Koordinaten

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$(x', y') = (0, 0),$	$(0, 7),$	$(5, 0),$	$(3, 5),$	$(11, 1),$	$(1, 2),$	$(3, 7),$	$(-5, -7),$
$(a', b') = (1, 5),$	$(3, 7),$	$(5, 9),$	$(7, 11),$	$(-7, -2),$	$(-5, -4),$	$(-3, -8),$	$(-1, -9),$
$(a'', b'') = (2, 7),$	$(6, 5),$	$(5, 11),$	$(14, -2),$	$(-7, 9),$	$(9, -4),$	$(-13, 8),$	$(-11, -13),$
$(a''', b''') = (6, 5),$	$(-8, -8),$	$(5, 6),$	$(4, 10),$	$(3, -9),$	$(10, 7),$	$(-11, 0),$	$(-13, 4),$

und betrachtet man die untereinanderstehenden Werte als zugehörig, so hat man folgende Lösungen für $\frac{m}{n}$:

$$1) -\frac{16}{5}; \quad 2) -\frac{106}{67}; \quad 3) \frac{0}{0} \text{ unbestimmt?} \quad 4) \frac{33}{23}; \quad 5) \frac{122}{55};$$

$$6) -\frac{47}{77}; \quad 7) -\frac{63}{24}; \quad 8) -\frac{57}{94}.$$

97. Wenn die Axe der Polarkoordinaten die x -Axe ist, so heisst die Gleichung $x=p$. Wenn die Axe der x durch den Punkt P geht und mit der Axe der Polarkoordinaten den Winkel α bildet, so ist die Gleichung der geraden Linie

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

$$98, 99. \quad 1) \varrho = 2; \quad \vartheta = +\frac{\pi}{2}; \quad \text{der eingeschlossene Winkel} = \frac{\pi}{3};$$

$$2) \quad \varrho \cos \vartheta = \frac{3 \sin \beta - 5 \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}, \quad \varrho \sin \vartheta = \frac{5 \cos \alpha - 3 \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)},$$

$$\varrho^2 = \frac{34 - 30 \cos (\beta - \alpha)}{[\sin (\beta - \alpha)]^2};$$

$$3) \quad \varrho = \frac{2 \sqrt{5 - 4 \cos \frac{75}{2}}}{\sin \frac{75}{2}}, \quad \cos \vartheta = \frac{2 \sin \frac{15}{2} - \sin 45}{\sqrt{5 - 4 \cos \frac{75}{2}}}.$$

$$100. \varrho' \varrho'' \sin(\vartheta' - \vartheta'') + \varrho'' \varrho \sin(\vartheta'' - \vartheta) + \varrho \varrho' \sin(\vartheta - \vartheta') = 0;$$

$$1) \quad \varrho \sin \vartheta + 2 \varrho \cos \vartheta - 2 = 0,$$

$$2) \quad \varrho \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin \vartheta + \varrho \cos \vartheta \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0.$$

101. In dem Schnittpunkt der beiden geraden Linien:
 $ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0.$

102. Die geraden Linien gehen durch den Punkt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$.

103. Ist die Gleichung irgend einer geraden Linie gegeben, $ux + vy + 1 = 0$, so hängt die Lage dieser Linie von u, v ab; umgekehrt bestimmt die Lage der geraden Linie die Grössen u, v , welche Koordinaten der geraden Linie oder Linienkoordinaten heissen und gleich sind den negativen reciproken Abschnitten, welche die gerade Linie auf den Koordinatenachsen macht.

104. Sie sind die Gleichungen einer geraden Linie in Linienkoordinaten und $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}$ die resp. Abschnitte auf den Koordinatenachsen.

105. Der Punkt $x = -\frac{1}{a}, y = 0.$ 106. $u = c.$

107. Der Punkt $y = -\frac{1}{b}.$ 108. $v = c.$

109. Die geraden Linien gehen durch den Punkt $x = \frac{A}{C}, y = \frac{B}{C}$; diesen Punkt stellt die Gleichung dar.

110. $Au + Bv + C = 0.$

111, 112. Zwei Punktgleichungen sind die Gleichungen einer geraden Linie in Linienkoordinaten und zwei Liniengleichungen sind die Gleichungen eines Punktes in Punktkoordinaten.

$$113. \quad \frac{au' + bv' + 1}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}, \quad \frac{Au' + Bv' + 1}{C\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

114. Beweis führt man wie in Aufg. 64.

$$115. \quad (au + bv + 1) + (a_1u + b_1v + 1) = 0.$$

116. Den unendlich fernen Punkt.

$$117. \quad 1) \ x = -\frac{1}{17}, \ y = -\frac{1}{17}; \quad 2) \ x = -\frac{1}{7}, \ y = -\frac{17}{7};$$

$$3) \ x = \frac{1}{3}, \ y = -\frac{11}{3}.$$

4) Diese Gleichung kann man schreiben

$$(2u + 12v + 1) - (u + 6v + 1) = 0;$$

sie stellt also den unendlich fernen Punkt dar.

$$118. \quad 1) \ -\frac{u}{17} - \frac{v}{17} + 1 = 0; \quad 2) \ -\frac{u}{7} - \frac{17v}{7} + 1 = 0;$$

$$3) \ \frac{u}{3} - \frac{11v}{3} + 1 = 0.$$

$$119. \quad 1) \ \begin{cases} \frac{2}{7}u - \frac{3}{7}v + 1 = 0, \\ -\frac{2}{17}u - \frac{5}{17}v + 1 = 0, \\ -\frac{2}{13}u - \frac{v}{13} + 1 = 0; \end{cases} \quad 2) \ \begin{cases} u - v + 1 = 0, \\ -5u + 4v + 1 = 0, \\ -\frac{3}{5}u + \frac{2}{5}v + 1 = 0; \end{cases}$$

$$3) \ \begin{cases} -u - v + 1 = 0, \\ 17u + 14v + 1 = 0, \\ \frac{19}{5}u + \frac{16}{5}v + 1 = 0; \end{cases} \quad 4) \ \begin{cases} -\frac{3}{7}u - \frac{8}{7}v + 1 = 0, \\ \frac{9}{47}u - \frac{10}{47}v + 1 = 0, \\ -\frac{u}{8} + \frac{3}{8}v + 1 = 0; \end{cases}$$

$$5) \ \begin{cases} \frac{u}{9} + \frac{v}{9} + 1 = 0, \\ +\frac{u}{16} + \frac{v}{2} + 1 = 0, \\ -\frac{u}{5} + \frac{v}{2} + 1 = 0; \end{cases} \quad 6) \ \begin{cases} \frac{3}{5}u + \frac{v}{5} + 1 = 0, \\ \frac{6}{7}u + \frac{5}{7}v + 1 = 0, \\ 3u + 2v + 1 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind in der Normalform; um die allgemeine Form zu erhalten, schafft man die Nenner weg.

$$120. \quad \begin{vmatrix} u - a', & v - b', & 1 \\ a - a', & b - b', & 1 \\ a'' - a', & b'' - b', & \frac{p+q}{q} \end{vmatrix} = 0.$$

Ist $a = a'$, $b = b'$, so ist die Gleichung:

$$(b' - b'')u + (a' - a'')v + a'b'' - a''b' = 0.$$

$$121. \quad (b' + b'' - 2b)u - (a' + b'' - 2a)v + a'b - ab' + a''b - ab'' = 0.$$

122.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} 10u - 43v + 119 = 0, \\ 30u + 41v - 221 = 0, \\ 3u - 23v + 91 = 0; \end{cases} & 2) \quad & \begin{cases} -4u + 3v + 2 = 0, \\ \frac{2}{5}u - \frac{3}{5}v + 2 = 0, \\ -\frac{14}{5}u + \frac{11}{5}v + 1 = 0; \end{cases} \\
 3) \quad & \begin{cases} 16u + 13v + 2 = 0, \\ \frac{14}{5}u + \frac{11}{5}v + 2 = 0, \\ 52u + 43v + 5 = 0; \end{cases} & 4) \quad & \begin{cases} 39u + 228v = 329, \\ 31u + 43v = 112, \\ 25u + 61v = -752; \end{cases} \\
 5) \quad & \begin{cases} 25u + 88v + 288 = 0, \\ -\frac{2}{45}u + \frac{11}{36}v + 1 = 0, \\ -11u + 80v + 160 = 0; \end{cases} & 6) \quad & \begin{cases} 51u + 32v + 70 = 0, \\ 18u + 11v + 10 = 0, \\ 27u + 19v + 14 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

123. $(u, v) = 1) \left(23\frac{9}{13}, 23\frac{6}{13}\right); 2) \left(17\frac{1}{2}, 115\frac{3}{5}\right);$

3) $\left(8\frac{2}{7}, 4\frac{1}{2}\right); 4) \left(-\frac{35}{2}, \frac{95}{2}\right), \left(-\frac{103}{9}, \frac{373}{9}\right), \left(-5\frac{7}{18}, 23\frac{5}{18}\right);$

5) $\left(\frac{9}{7}, -\frac{5}{7}\right), (1, -1), \left(\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}\right);$

6) $(20, 32), (-98, 91), \left(\frac{698}{29}, \frac{515}{29}\right).$

124. 1) $\left(\frac{318}{25}, -\frac{23}{25}\right), \left(-\frac{12}{19}, \frac{55}{19}\right), \left(-\frac{5}{22}, \frac{37}{22}\right), \left(-\frac{15}{2}, -\frac{19}{6}\right)$

sind die Koordinaten der Seiten. $\left(\frac{15}{14}, -\frac{31}{14}\right)$ sind die Linien-

koordinaten der Diagonale, welche durch die Ecken $u - 9v - 21 = 0$,

$3u + v = 1$ geht, und $\left(\frac{37}{40}, \frac{49}{20}\right)$ sind die Linienkoordinaten der

Diagonale, welche durch die Ecken $2u + 7v = 19$, $4u - 6v + 11 = 0$ geht; beide Diagonalen schneiden sich in dem Punkte

$$2612u + 82v - 2617 = 0.$$

Eine andere Diagonale ist die Verbindungslinie der Seitenschnittpunkte

$\left(\frac{318}{25}, -\frac{23}{25}\right), \left(-\frac{5}{22}, \frac{37}{22}\right)$ und $\left(-\frac{12}{19}, \frac{55}{19}\right), \left(-\frac{15}{2}, -\frac{19}{6}\right).$

Diese Diagonale geht also durch die Punkte

$$1431u + 7121v - 11651 = 0, \quad 691u - 783v + 2703 = 0.$$

2) Die Koordinaten der Seiten des Vierecks sind:

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right), \left(\frac{225}{536}, \frac{153}{536}\right), \left(\frac{123}{289}, \frac{63}{289}\right), (-1, 2).$$

Es sind $\left(\frac{29}{74}, \frac{45}{74}\right)$ die Linienkoordinaten der Diagonale, welche die Punkte $u + v = 1$ und $81u + 7v = 36$ verbindet, und $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ die Linienkoordinaten der Diagonale, welche die Ecken $16u + 8v = 9$ und $5u + 4v = 3$ verbindet; beide Diagonalen schneiden sich in dem Punkte: $143u + 32v = \frac{151}{2}$; die andere Diagonale ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte der geraden Linien

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right), \left(\frac{123}{289}, \frac{63}{289}\right) \text{ und } \left(\frac{225}{536}, \frac{153}{536}\right), (-1, 2).$$

125, 126. Die Koordinaten der Verbindungslinien der Gegenpunkte sind:

1) $(-11, -16)$, $\left(\frac{19}{12}, -\frac{1}{12}\right)$, welche sich in dem Punkte $193u - 113v - 315 = 0$ schneiden.

2) $\left(\frac{16}{9}, \frac{11}{9}\right)$, $(-8, 7)$, welche sich in dem Punkte $13u + 22v - 50 = 0$ schneiden.

127. Man vertausche nur x, y mit u, v .

$$128. \quad 2\frac{2}{5}. \quad 129. \quad \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad 130. \quad \frac{18}{5}\sqrt{5}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{18}{89}\sqrt{89}.$$

$$131. \quad \frac{1}{\sqrt{290}}, \frac{2}{15}, \frac{4}{5\sqrt{113}}.$$

$$132. \quad (au + bv + c)(a'u' + b'v' + c) = (au' + bv' + c)(a'u + b'v + c).$$

$$133. \quad u = \frac{(Aa + Bb + C)a' - (Aa' + Bb' + C)a}{(Aa + Bb + C) - (Aa' + Bb' + C)},$$

$$v = \frac{(Aa + Bb + C)b' - (Aa' + Bb' + C)b}{(Aa + Bb + C) - (Aa' + Bb' + C)}.$$

Bestimmung von geometrischen Örtern mittelst der geraden Linie.

134. Der geometrische Ort ist eine gerade Linie senkrecht zur Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte, welche vom Mittelpunkt dieser Verbindungslinie um $\frac{m^2}{4c}$ absteht, wenn $2c$ die Entfernung der gegebenen Punkte und m^2 die konstante Differenz der Quadrate der Entfernungen eines Punktes von den gegebenen Punkten ist.

Die Basis AB sei die Axe der x und die rechtwinklige Halbierungslinie die Axe der y . Die Spitze C habe die Koordinaten x, y , so ist

$$AC^2 = y^2 + (c + x)^2, \quad BC^2 = y^2 + (c - x)^2, \quad AC^2 - BC^2 = m^2,$$

also die Gleichung des Ortes $4cx = m^2$.

135. Wenn die Basis und die rechtwinklige Halbierungslinie derselben die Axen sind und die Länge der Basis $= 2c$, die konstante Summe $= m$ gesetzt wird, so ist der geometrische Ort die gerade Linie $2my - 4cx = m^2$.

Nach der Bezeichnung der Aufl. 134 ist

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB(c + x) = (m - y)^2,$$

also die Gleichung des Ortes $2my - 4cx = m^2$.

136. Der gesuchte Ort ist eine gerade Linie durch O .

Die Axen seien OA und $OC \parallel AB$. Die Gleichung von AB ist $y = mx$, also $AB = m \cdot OA$. Es ist daher $AS = y = \frac{m}{n}x$ die Gleichung des Ortes.

137. Die Seiten CA, CB des Dreiecks ABC seien die Koordinatenaxen. Der Punkt $P(x, y)$ theile die Basis in dem Verhältniss $PA : PB = n : m$. Es ist $CA = \frac{m+n}{m}x$, $CB = \frac{m+n}{n}y$ und der Ort die gerade Linie $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{p}{m+n}$.

138, 139, 140, 141. Nimmt man die Schenkel des Winkels w zu Koordinatenaxen, so ergeben sich auf die einfachste Art die Gleichungen des geometrischen Ortes, welcher eine gerade Linie ist.

In Aufg. 138 ist $OM = x + y \cos w$, $ON = y + x \cos w$ und daher die Gleichung des Ortes $x + y$ konstant. In Aufg. 139 ist $\frac{OM}{ON} = \text{konstant}$, also die Gleichung des Ortes $x + y \cos w = c (y + x \cos w)$. Ist in Aufg. 140 das gegebene Verhältniss 1:2, so ist die Gleichung des Ortes $y + x \cos w = a (x + y \cos w) + 2b$. Die Gleichung des Ortes 141 ist $2y - 2x \cos w = m (2x - 2y \cos w) + n \sin^2 w$.

142. Um den geometrischen Ort, die gerade Linie, zu finden, nimmt man O zum Ursprung, OP und die darauf Senkrechte zu Axen.

S habe die Koordinaten x', y' , A habe die Koordinaten α', β' und B die Koordinaten α'', β'' . Die Gleichung von SA ist

$$(y' - \beta') x - (x' - \alpha') y = y' \alpha' - x' \beta'.$$

Es ist also $OC = -\frac{\beta' x' - \alpha' y'}{y' - \beta'}$ und ebenso $OD = -\frac{x' \beta' - y' \alpha''}{y' - \beta'}$.

Ist $OP = c$, so ist $OC = l \cdot DP$ oder

$$\frac{\beta' x' - \alpha' y'}{\beta' - y'} = l \left\{ c - \frac{\beta' x' - \alpha'' y'}{\beta' - y'} \right\}.$$

Lässt man die Indices an den x', y' weg, so ist die Gleichung des Ortes

$$y \alpha' - \beta' x = l \{ c (y - \beta') - (y \alpha'' - \beta' x) \}.$$

143, 144. Die beiden festen geraden Linien OM, ON seien die Koordinatenachsen. Die Ecken A, B des Dreiecks ABC liegen in OM, ON , die Seite AB geht durch den Punkt $R (x''', y''')$, die Seite BC geht durch den Punkt $Q (x'', y'')$, die Seite AC geht durch den Punkt $P (x', y')$; der Punkt C habe die Koordinaten ξ, η . Die Gleichung von CP ist

$$(\eta - y') x - (\xi - x') y = \eta x' - \xi y',$$

es ist daher $OA = \frac{\eta x' - \xi y'}{\eta - y'}$; und ebenso findet man $OB = \frac{\eta x'' - \xi y''}{x'' - \xi}$.

Die Gleichung von AB ist daher $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$ oder

$$\frac{x (\eta - y')}{\eta x' - \xi y'} + \frac{y (\xi - x'')}{\xi y'' - \eta x''} = 1.$$

Diese Linie soll durch den Punkt R gehen, also ist

$$\frac{x''' (\eta - y')}{\eta x' - \xi y'} + \frac{y''' (\xi - x'')}{\xi y'' - \eta x''} = 1.$$

Bringt man die Brüche weg, setzt statt ξ, η resp. x, y , so ist die Gleichung des Ortes von C von der Form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Nimmt man aber an, dass die Punkte $x', y'; x'', y''$ auf der geraden Linie $y = mx$ liegen, sodass $y' = mx', y'' = mx''$, so ist die Gleichung des Ortes von C

$$x''x'''(y - y') - y'''x'(x - x'') = x'x''(mx - y).$$

Der Punkt C beschreibt eine gerade Linie. Liegt der Punkt x''', y''' auch auf der geraden Linie $y = mx$, so ist $y''' = mx'''$ und die Gleichung des Ortes ist

$$yx''(x' + x''') = xy'(x'' + x''').$$

Liegen die drei Punkte P, Q, R in einer geraden Linie, so nimmt man am besten diese gerade Linie RP zur Axe der x und die gerade Linie OR zur Axe der y . Setzt man $RO = b, RP = c, RQ = c'$ und $RM = a, RN = a'$, wenn M, N die Schnittpunkte der geraden Linien OM, ON mit der geraden Linie RP sind, so sind die Gleichungen von OM und ON $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1$, und die Gleichung von CP ist

$$(\xi - c)y - \eta x + \eta c = 0.$$

Die geraden Linien PC und OM schneiden sich daher in dem Punkte A :

$$x_1 = \frac{ab(\xi - c) + ac\eta}{b(\xi - c) + a\eta}, \quad y_1 = \frac{b(a - c)\eta}{b(\xi - c) + a\eta}.$$

Ebenso findet man die Koordinaten von B :

$$x_2 = \frac{a'b(\xi - c') + a'c'\eta}{b(\xi - c') + a'\eta}, \quad y_2 = \frac{b(a' - c')\eta}{b(\xi - c') + a'\eta}.$$

Da die gerade Linie AB durch den Punkt R geht, so ist

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}. \quad \text{Vertauscht man } \xi, \eta \text{ mit } x, y, \text{ so erhält man als}$$

Gleichung des Ortes von C :

$$\frac{(ac' - a'c)x}{cc'(a - a') - aa'(c - c')} + \frac{y}{b} = 1.$$

Der Ort ist demnach eine durch O gehende gerade Linie. Siehe Aufg. 164, 165, 236, 272—287.

145, 146. Der gesuchte Ort ist eine gerade Linie, welche den Mittelpunkt der Basis mit dem Mittelpunkt der Höhe verbindet; einem Punkte dieser geraden Linie entspricht ein Quadrat.

Die Basis AB des Dreiecks ABC und die Höhe CH seien die Koordinatenachsen. Das eingeschriebene Rechteck $EDFG$ sei so, dass ED in AB fällt und dass der Punkt F auf AC und G auf BC liegt. Setzt man $CH = h$, $HB = l$, $AH = l'$, so ist

$$HE = -l' \left(1 - \frac{k}{h}\right), \quad k = FE, \quad HD = l \left(1 - \frac{k}{h}\right).$$

Wenn der Mittelpunkt die Koordinaten x, y hat, so ist $y = \frac{FE}{2} = \frac{k}{2}$ und $x = \frac{HE + HD}{2} = \frac{l - l'}{2} \left(1 - \frac{k}{h}\right)$. Der Ort hat also die Gleichung $\frac{2x}{l - l'} + \frac{2y}{h} = 1$.

Ist $FE = ED$, so ist das Viereck ein Quadrat. In diesem Falle ist noch für den Ort $x = y = \frac{h(l - l')}{2(h + l - l')}$.

147, 148. Man nehme die Basis und die Höhe zu Axen. Der geometrische Ort ist eine Gerade, welche in 148 die Spitze des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Basis verbindet.

Die festen Punkte E und D haben die Koordinaten $(m, 0)$ und $(n, 0)$. Die gerade Linie $FG \parallel ED$ schneide die Seiten AC, BC des Dreiecks ABC in den Punkten F, G . Es ist die Gleichung von

$$FD \left\{ l' \left(1 - \frac{k}{h}\right) + m \right\} y + kx - km = 0,$$

$$EG \left\{ l \left(1 - \frac{k}{h}\right) - n \right\} y - kx + kn = 0.$$

Die Gleichung des Ortes ist

$$(l - n) \left(\frac{l'}{h} y - x + m \right) = (l' + m) \left(\frac{l}{h} y + x - n \right).$$

149. Es seien MM' und NN' ein Paar Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms; es ist der Ort des Schnittpunktes

von MN und $M'N'$ zu bestimmen. Zwei Seiten des Parallelogrammes seien die Axen, $MM' = a$, $NN' = b$. Die Gleichung von

$$\begin{aligned} MN \text{ ist } (b - \eta)x - \xi y + \xi\eta &= 0, \\ M'N' \text{ „ } \eta x - (a - \xi)y - \xi\eta &= 0, \end{aligned}$$

wenn N die Koordinaten ξ, b und M' die Koordinaten a, η hat. Addiert man beide Gleichungen, so ist die Gleichung des Ortes $bx = ay$ die Diagonale des Parallelogramms.

150. Die festen Geraden nimmt man am besten zu Axen. Der gesuchte Ort ist eine durch den Anfangspunkt gehende gerade Linie.

151. Eine durch den gegebenen Punkt gehende gerade Linie.

Fällt man von dem Schnittpunkte O der drei geraden Linien eine Senkrechte auf die gerade Linie ABC , verbindet man O mit D durch eine gerade Linie und setzt die Höhe ON des Dreiecks OAB gleich h , so ist

$$\begin{aligned} h \cdot AC &= OA \cdot OC \sin AOC, & h \cdot DB &= OB \cdot OD \sin BOD, \\ h \cdot AD &= OA \cdot OD \sin AOD, & h \cdot CB &= OC \cdot OB \sin BOC, \end{aligned}$$

also ist

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin AOC}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin BOD} = \text{const.}$$

152. Man nehme die Verbindungslinie der gegebenen Punkte und die rechtwinklige Halbierungslinie derselben zu Axen, dann ist die Gleichung des gesuchten Ortes $m(c+x)^2 + n(c+x)^2 + (n+m)y^2 = p$. — Kreis; $2c$ = Länge der Verbindungslinie der gegebenen Punkte.

153. Nimmt man dasselbe Koordinatensystem wie in 152, so ist der gesuchte Ort: $(c+x)^2 + y^2 = p(c-x)^2 + py^2$. Siehe Aufg. 359.

154. Für alle drei Fälle erhält man eine Gleichung von der Form $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Siehe Aufg. 359.

155. Nimmt man die Axen wie in 152 und ist die Differenz der Winkel gleich D , so ist die Gleichung des Orts $x^2 - y^2 + 2xy \cotg D = c^2$.

156. Sind die Axen dieselben, wie in Aufg. 155, so ist die Gleichung des Ortes: 1) $3x^2 - y^2 + 2cx = c^2$; 2) $p(x^2 + y^2 - c^2) = 2c(c - x)$, siehe Aufg. 359; wenn in 1) das Verhältniß der Basiswinkel 1:2 gesetzt ist; allgemein ist der Ort gegeben durch die Gleichungen

$$c - x = r \cos \alpha n, y = r \sin \alpha n, y = r_1 \sin \alpha, c + x = r_1 \cos \alpha,$$

aus welchen man mit Hilfe der bekannten Formeln für $\cos \alpha n$, $\sin \alpha n$, die Grösse α , r , r_1 eliminieren kann.

157. Wenn die Axen dieselben sind, wie in Aufg. 134, und die konstante Summe gleich $2a$ ist, so folgt die Gleichung des Ortes: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ aus den Gleichungen $AC^2 = y^2 + (c + x)^2$, $BC^2 = y^2 + (c - x)^2$, $AC + CB = 2a$.

158. Wenn die Axen dieselben sind, wie in Aufg. 134, und die konstante Differenz gleich $2a$ ist, so folgt die Gleichung des Ortes: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$ aus den Gleichungen $AC^2 = y^2 + (c + x)^2$, $BC^2 = y^2 + (c - x)^2$, $AC - CB = 2a$.

159. Die gegebene gerade Linie und eine vom gegebenen Punkte darauf Senkrechte seien die Axen und der Abstand des gegebenen Punktes von der gegebenen geraden Linie sei p , die Gleichung des Ortes ist: $y^2 = 2px - p^2$.

160. Die feste Linie und die von dem festen Punkte auf die gerade Linie gefällte Senkrechte seien die Koordinatenaxen, und zwar die feste gerade Linie die x -Axe, die Gleichung des Ortes ist: $xy = \pm (b \pm y) \sqrt{a^2 - y^2}$.

161. Die Seiten $CA = b$, $CB = a$ seien die Koordinatenaxe. Die Gleichung der Basis ist $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; es ist aber $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m}$, also ist die Gleichung der Basis $\frac{1}{a}(x - y) + \frac{y}{m} - 1 = 0$; die Basis geht durch den Punkt $x = y = m$.

162. Zwei der festen geraden Linien nehme man zu Axen, dann hat die dritte feste Gerade die Gleichung $y = mx$; sind die Koordinaten der festen Punkte x', y' und x'', y'' , so geht die dritte Seite durch den Schnittpunkt der beiden geraden Linien

$$\frac{y''}{y'' - mx''} x - \frac{x'}{y' - mx'} y = 0, \quad \frac{m}{y'' - mx''} x - \frac{y}{y' - mx'} + 1 = 0.$$

163. Im allgemeinen geht die Basis nicht durch einen festen Punkt; liegen aber die beiden Punkte in einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der beiden festen geraden Linien geht, so geht die Basis durch einen festen Punkt.

164, 165. Beweis folgt aus 143, 144; R liegt auf der geraden Linie CC' .

166, 167. Diese Sätze sind die Sätze 164, 165 in einem anderen Wortlaute. Siehe Aufg. 236, 272–287.

168. Folgt aus Aufg. 166.

169. Sind die Gleichungen der geraden Linien

$$\varrho \cos(\vartheta - \alpha) = p_1, \varrho \cos(\vartheta - \beta) = p_2, \varrho \cos(\vartheta - \gamma) = p_3 \text{ etc.,}$$

so ist die Gleichung des Ortes:

$$\frac{n}{\varrho} = \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{p_1} + \frac{\cos(\vartheta - \gamma)}{p_2} + \dots$$

welche eine gerade Linie darstellt.

170. Man nehme AB zur Axe, A zum Pol; Q beschreibt eine gerade Linie senkrecht zu AB , welche vom Pol die Entfernung $\frac{AP \cdot AQ}{AB}$ hat.

171. Man nehme A zum Pol und die Basis zur festen Axe; der Ort ist eine auf die Basis senkrechte gerade Linie.

172. Die feste Ecke sei der Pol und die vom Pol auf die feste Gerade gefällte Senkrechte sei die Axe; der Ort ist eine gerade Linie, die mit der gegebenen Geraden den Winkel des Dreiecks bildet, der am Pole liegt.

173, 174. Nimmt man die beiden festen Geraden zu Axen und hat der Punkt in Aufg. 174 von den Endpunkten der Linie, auf welcher er liegt, die Entfernungen auf a und b , so beschreibt dieser Punkt den Ort: $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha$, wenn α der Winkel zwischen den Axen ist. Diesen Ort beschreibt jeder Punkt der Basis des Dreiecks; die Spitze des Dreiecks

beschreibt einen Ort, dessen Gleichung von der Form: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D$ ist.

175. Die Richtung der beweglichen Linie sei die Axe der x ; die Gerade, in welcher A liegt, habe die Gleichung $x = m'y + c'$; die Gerade mit B habe die Gleichung $x = m''y + c''$ und die Gerade durch C habe die Gleichung $x = m'''y + c'''$; die Gleichung des genannten Ortes ist:

$$\frac{y(m''' - m') + c''' - c'}{y(m'' - m''') + c'' - c'''} = n \cdot \frac{x - m'y - c'}{m''y + c'' - x}.$$

Harmonische Linien und Punkte. Punkte und Linien der Involution. Dreieckskoordinaten.

176—180. Die Gleichung $A_0 - \lambda A_1 = 0$ stellt alle
 { Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Geraden $A_0 = 0$,
 { Punkte, welche auf der Verbindungslinie der Punkte $A_0 = 0$,
 $A_1 = 0$ gehen } dar. Es sind also $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_0 - \lambda A_1 = 0$,
 $A_1 = 0$ liegen }

$A_0 - \lambda' A_1 = 0$ { vier gerade Linien, welche durch einen Punkt
 { vier Punkte, welche auf einer Geraden
 gehen. } Sind $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_0 - \lambda A_1 = 0$, $A_0 - \lambda' A_1 = 0$
 liegen. }

die Gleichungen der { vier geraden Linien OA, OB, ON, ON' }
 { vier Punkte derselben Linie A, B, N, N' }

so ist $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\sin AON}{\sin NOB}, \quad \lambda' = \frac{\sin AON'}{\sin N'OB} \\ \lambda = \frac{AN}{NB}, \quad \lambda' = \frac{AN'}{N'B} \end{array} \right\}$. Der Quotient $\lambda : \lambda'$

heisst das Doppelverhältnis oder anharmonische Verhältnis der vier { geraden Linien }
 { Punkte }.

Wird der Quotient $\lambda : \lambda'$ gleich -1 , so heisst das Doppelverhältnis ein harmonisches, also $\frac{AN}{NB} : \frac{AN'}{N'B} = -1$ und ebenso

$$\sin AON : \sin NOB = - \sin AON' : \sin N'OB.$$

$$181. \quad \frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} : \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1} ; \frac{l}{m}.$$

182. 1) $\frac{287}{125}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $-\frac{15}{169}$; 4) unmöglich, da die Linien sich nicht in einem Punkte schneiden; 5) $\frac{1}{5}$; 6) $\frac{10}{19}$.

183, 184. 1) $9x - 26y + 8 = 0$; 2) die Linien gehen nicht durch einen Punkt; 3) $36x - 15y = 26$; 4) $x - 3y - 27 = 0$; 5) $6x + 20y - 33 = 0$; 6) die Linien gehen nicht durch einen Punkt.

185. Das Doppelverhältnis ist ein harmonisches.

186. Besteht die Gleichung $\frac{\lambda - \lambda_1}{\mu - \lambda_1} + \frac{\lambda - \mu_1}{\mu - \mu_1} = 0$, $\frac{l}{m} = -1$, so sind die Verhältnisse der Linienpaare harmonisch.

187. In Aufg. 182 sei gegeben das erste Linienpaar und die erste Gerade des zweiten Paares, wie z. B.

$$1) \begin{cases} 19x + 2y + 17 = 0, & 3x - 4y + 7 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0, & \text{harmonisches Verhältniss} = -1, \end{cases}$$

dann sind die Gleichungen der gesuchten Linien:

$$1) 39x + 23y + 11 = 0; \quad 2) 4x + y + 22 = 0;$$

$$3) x - 3y + 2 = 0; \quad 5) 11x - 9y + 40 = 0;$$

$$6) 61x + 182y - 853 = 0.$$

Die Gleichungen der in Aufg. 184 gesuchten geraden Linien sind:

$$1) 5x - 4y = 6; \quad 3) 54x - 39y - 28 = 0;$$

$$4) 2x + 3y = 0; \quad 5) 10x + 12y - 37 = 0.$$

188. Durch Vertauschung von x, y mit u, v erhält man die Lösung dieser Aufgabe.

189. Mittelst Aufg. 151 folgt der Beweis leicht.

190. Man ziehe von einem Punkte nach den drei Punkten gerade Linien und suche eine gerade Linie, so dass die Linienpaare ein harmonisches Verhältniss haben. Siehe Aufg. 186, 187.

191. Der vierte Punkt liegt unendlich fern.

192, 193, 194, 195. Es seien die Gleichungen der beiden gegebenen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linienpaare} \\ \text{Punktpaare} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_0 - l_0 \quad V_1 = 0, \quad V_0 - l_1 \quad V_1 = 0 \\ V_0 - m_2 \quad V_1 = 0, \quad V_0 - m_1 \quad V_1 = 0 \end{array} \right\}$ und die Gleichungen des gesuchten $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linienpaares} \\ \text{Punktpaares} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_0 - l \quad V_1 = 0 \\ V_0 - m \quad V_1 = 0 \end{array} \right\}$. Dieses $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linienpaar} \\ \text{Punktpaar} \end{array} \right\}$ ist harmonisch zu jedem der gegebenen, wenn ist

$$lm - \frac{1}{2} (l + m) (l_0 + m_0) + l_0 m_0 = 0,$$

$$lm - \frac{1}{2} (l + m) (l_1 + m_1) + l_1 m_1 = 0;$$

diese Gleichungen folgen aus Aufg. 181. Setzt man $lm = a$, $l + m = b$, so sind l, m die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 - az + b = 0.$$

Es giebt also nur ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linienpaar} \\ \text{Punktpaar} \end{array} \right\}$, welches harmonisch ist zu zwei gegebenen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linienpaaren} \\ \text{Punktpaaren} \end{array} \right\}$.

196, 197. Haben die Linienpaare resp. Punktpaare die Gleichungen der Aufg. 192, so ist die gesuchte Bedingung:

$$(l_0 - m_1) (l_1 - m_2) (l_2 - m_0) + (m_0 - l_1) (m_1 - l_2) (m_2 - l_0) = 0.$$

198, 199. Nimmt man nämlich in der Gleichung Aufg. 197 l_0 und m_0 als unbekannte Grössen an, so sind diese durch die Gleichung nicht eindeutig bestimmt.

200, 201. In diesem Falle sind die Grössen l_0, m_0 der Aufg. 198, 199 durch Auflösung der linearen Gleichungen $l_0 m_0 = b$, $l_0 + m_0 = a$ oder der Gleichung $z^2 - az + b = 0$ eindeutig bestimmt.

202, 203. Die Gleichungen der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Seiten} \\ \text{Ecken} \end{array} \right\}$ des Dreiecks seien in der Normalform $A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0$ gegeben, dann sind die Gleichungen $\frac{A_1}{a_1} \pm \frac{A_2}{a_2} = 0, \frac{A_2}{a_2} \pm \frac{A_0}{a_0} = 0, \frac{A_0}{a_0} \pm \frac{A_1}{a_1} = 0$

die Repräsentanten von drei $\left\{ \begin{array}{l} \text{Geraden, die durch einen Punkt} \\ \text{Punkten, die auf den Seiten des} \end{array} \right\}$
gehen und einzeln die Ecken des Dreiecks enthalten
Dreiecks liegen und sich in einer geraden Linie befinden

Nimmt man die Gleichungen $\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0$, $\frac{A_2}{a_2} + \frac{A_0}{a_0} = 0$,
 $\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} = 0$, $\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} = 0$ etc., so erhält man durch passende
Addition die Gleichungen von der Form

$$\left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} \right) - \left(\frac{A_2}{a_2} + \frac{A_0}{a_0} \right) + \left(\frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} \right) \equiv 0,$$

welche die Sätze beweisen.

204, 205. Diese Sätze folgen aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0, \\ -\frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0, \\ \frac{A_0}{a_0} - \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} &= 0, \\ \frac{A_0}{a_0} + \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} &= 0. \end{aligned}$$

Siehe Aufg. 211, 212.

206, 207. Der Satz 206 ist der Satz 204 in einfacherer
Fassung. Die drei gegebenen Linien seien A, B, C ; A, B
seien das eine Linienpaar, von dem anderen Linienpaar sei C
gegeben, die ihr zugehörige vierte harmonische Linie D soll
konstruiert werden. Man ziehe irgend eine gerade Linie M .
Die Schnittpunkte derselben mit den gegebenen geraden Linien
 A, B verbinde man mit einem beliebigen Punkte der geraden
Linie C durch die geraden Linien N, P . Diese geraden Linien
schneiden A und B in zwei Punkte, durch welche man wieder
eine gerade Linie zieht. Wenn man den Schnittpunkt dieser
geraden Linie und der geraden Linie M durch eine gerade
Linie D mit dem Schnittpunkte von A und B verbindet, so
ist D die gesuchte gerade Linie.

208. Es seien $V_0 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ die Gleich-
ungen der Seiten des Vierecks. P sei ein Punkt, der nicht

auf den Seiten des Vierecks liegt, und v_0, v_1, v_2, v_3 seien die Werte von V_0, V_1, V_2, V_3 , wenn man in den Gleichungen $V=0$ die Koordinaten von P einsetzt; dann sind die Gleichungen der drei Linienpaare, welche P mit den Endpunkten der Diagonalen verbinden:

$$\frac{V_0}{v_0} - \frac{V_3}{v_3} = 0, \quad \frac{V_1}{v_1} - \frac{V_3}{v_3} = 0, \quad \frac{V_2}{v_2} - \frac{V_3}{v_3} = 0,$$

$$\frac{V_1}{v_1} - \frac{V_2}{v_2} = 0, \quad \frac{V_2}{v_2} - \frac{V_0}{v_0} = 0, \quad \frac{V_0}{v_0} - \frac{V_1}{v_1} = 0.$$

Diese Gleichungen bringt man auf die Normalform, indem man setzt

$$\frac{V_0}{v_0} - \frac{V_3}{v_3} = \frac{A_0}{r_0 m_0}, \quad \frac{V_1}{v_1} - \frac{V_3}{v_3} = \frac{A_1}{r_1 m_1}, \quad \frac{V_2}{v_2} - \frac{V_3}{v_3} = \frac{A_2}{r_2 m_2},$$

und erhält die Gleichungen:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0,$$

$$\frac{A_1}{m_1 r_1} - \frac{A_2}{m_2 r_2} = 0, \quad \frac{A_2}{m_2 r_2} - \frac{A_0}{m_0 r_0} = 0, \quad \frac{A_0}{m_0 r_0} - \frac{A_1}{m_1 r_1} = 0.$$

Es stellen aber die drei Gleichungspaare

$$V_n - p_n^0 V_s = 0, \quad V_n - p_n^1 V_s = 0, \quad V_n - p_n^2 V_s = 0$$

$$V_n + p_n^0 V_s = 0, \quad V_n + p_n^1 V_s = 0, \quad V_n + p_n^2 V_s = 0$$

irgend drei Linienpaare der Involution dar, und $V_n = 0, V_s = 0$ das Linienpaar, welches harmonisch ist zu jedem der drei Paare.

Man kann aber immer setzen:

$$V_n - p_n^0 V_s = \frac{V_t}{l_1 - l_2}, \quad V_n - p_n^1 V_s = \frac{V_{t+1}}{l_2 - l_0}, \quad V_n - p_n^2 V_s = \frac{V_{t+2}}{l_0 - l_1}$$

und man hat

$$V_t = 0, \quad V_{t+1} = 0, \quad V_{t+2} = 0,$$

$$\frac{V_{t+1}}{n_1} - \frac{V_{t+2}}{n_2} = 0, \quad \frac{V_{t+2}}{n_2} - \frac{V_t}{n_0} = 0, \quad \frac{V_t}{n_0} - \frac{V_{t+1}}{n_1} = 0,$$

$$\frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2} = n_0, \quad \frac{l_2 - l_0}{l_2 + l_0} = n_1, \quad \frac{l_0 - l_1}{l_0 + l_1} = n_2.$$

Bringt man diese Gleichungen auf die Normalform, indem man setzt

$$q_0 V_t = A_t, \quad q_1 V_{t+1} = A_{t+1}, \quad q_2 V_{t+2} = A_{t+2},$$

so hat man die Gleichungen:

$$A_t = 0, \quad A_{t+1} = 0, \quad A_{t+2} = 0,$$

$$\frac{A_{t+1}}{n_1 q_1} - \frac{A_{t+2}}{n_2 q_2} = 0, \quad \frac{A_{t+2}}{n_2 q_2} - \frac{A_t}{n_0 q_0} = 0, \quad \frac{A_t}{n_0 q_0} - \frac{A_{t+1}}{n_1 q_1} = 0.$$

Nimmt man $t = 0$, $n_s q_s = m_s r_s$ ($s = 0, 1, 2$), so erhält man obige Gleichung und der Satz ist bewiesen.

209. Sind von den, vom Punkte P ausgehenden, drei Linienpaaren $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ der Involution die fünf ersten gegeben, so zieht man, um die sechste Linie B_2 zu erhalten, irgend eine gerade Linie N , welche die geraden Linien B_0 und A_1 in (NB_0) und (NA_1) schneiden. Jeden dieser Punkte verbinde man durch eine gerade Linie mit einem Punkte auf A_2 . Diese Linien M und Q schneiden B_1 und A_0 in (MB_1) und (QA_0) , welche man durch eine gerade Linie R verbindet. Die Geraden R und N schneiden sich in einem Punkte, durch welchen die gesuchte gerade Linie PB_2 geht.

210. Nimmt man die Bezeichnung von 208 und die Figur von 209, so sieht man, dass in $MNRQ$ drei gerade Linien sich schneiden. Die sechs vierten harmonischen Linien zu diesen haben die Gleichungen:

$$\frac{V_0}{v_0} + \frac{V_3}{v_3} = 0, \quad \frac{V_1}{v_1} + \frac{V_3}{v_3} = 0, \quad \frac{V_2}{v_2} + \frac{V_3}{v_3} = 0;$$

$$\frac{V_1}{v_1} + \frac{V_2}{v_2} = 0, \quad \frac{V_2}{v_2} + \frac{V_0}{v_0} = 0, \quad \frac{V_1}{v_1} + \frac{V_0}{v_0} = 0.$$

Hieraus folgt für jedes Gleichungspaar:

$$\frac{V_0}{v_0} + \frac{V_1}{v_1} + \frac{V_2}{v_2} + \frac{V_3}{v_3} = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

211, 212. Diese Sätze folgen aus 204, 205.

213. Aus Satz 189.

214. Sind auf einer geraden Linie das Punktepaar A, B und der Punkt C gegeben, so konstruiert man den vierten harmonischen Punkt, indem man ein Dreieck ABP bildet, dieses Dreieck durch eine gerade Linie CNM schneidet, welche AP in N und PB in M trifft. Man ziehe NP und AM , welche sich in Q schneiden; verbindet man Q mit P , so schneidet PQ die gerade Linie AB in dem gesuchten Punkte.

215. Beweis in Aufg. 208.

216. Sind die Punktpaare $A_0, B_0, A_1 B_1$ und der Punkt A_2 gegeben, so legt man, um den Punkt B_2 zu finden, durch A_2, B_1, B_0 irgend drei gerade Linien, welche das Dreieck M_1, M_2, M_3 bilden; zieht man die zwei Geraden $M_3 A_0, M_2 A_1$, verbindet deren Schnittpunkt M_0 mit M_1 durch eine gerade Linie, so trifft diese die Linie der Punktpaare im Punkte B_2 .

217. Der allgemeine Satz folgt aus Aufg. 210 und der Specialsatz dadurch, dass man die gerade Linie in das Unendliche fallen lässt.

218, 219, 220, 221, 222. Ist $V_0 - k_1 V_2 = 0, V_0 - k_2 V_1 = 0$ etc. eine Reihe von Gleichungen der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Strahlen eines Büschels} \\ \text{Punkte einer Punktreihe} \end{array} \right\}$ und $V'_0 - k_1 V'_1 = 0, V'_0 - k_2 V'_1$ eine Reihe von Gleichungen von anderen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Strahlen eines Büschels} \\ \text{Punkten einer Punktreihe} \end{array} \right\}$, und nennt man die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Strahlen} \\ \text{Punkte} \end{array} \right\}$ entsprechend, in deren Gleichungen derselbe Koeffizient auftritt, z. B. $V_0 - k_2 V_1 = 0, V'_0 - k_2 V'_1 = 0$, so ist das Doppelverhältnis von vier $\left\{ \begin{array}{l} \text{Strahlen des einen Büschels} \\ \text{Punkten der einen Punktreihe} \end{array} \right\}$ dem Doppelverhältnis der entsprechenden vier $\left\{ \begin{array}{l} \text{Strahlen des} \\ \text{Punkten der} \end{array} \right\}$ anderen Büschels $\left\{ \begin{array}{l} \text{anderer Punktreihe} \end{array} \right\}$ gleich; die beiden Systeme heissen homographische, projektivische oder konforme $\left\{ \begin{array}{l} \text{Strahlenbüschel} \\ \text{Punktreihen} \end{array} \right\}$. Ist eine Punktreihe gegeben und man zieht durch die Punkte Geraden nach einem Punkte, so entsteht ein Strahlenbüschel, welches nach Aufg. 189 projektivisch mit der Punktreihe ist und mit ihr eine perspektivische Lage hat; nimmt man zu dem gegebenen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punktsystem} \\ \text{Strahlenbüschel} \end{array} \right\}$ ein zweites $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punktsystem} \\ \text{Strahlenbüschel} \end{array} \right\}$, welche zu den gegebenen projektivisch sind, so ist $\left\{ \begin{array}{l} \text{das letzte} \\ \text{die letzte} \end{array} \right\}$ Strahlenbüschel $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt-} \\ \text{Punktreihe} \end{array} \right\}$ projektivisch zu dem gegebenen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt-} \\ \text{Strahlen-} \end{array} \right\}$

system $\left. \begin{array}{l} \text{büschel} \end{array} \right\}$. Die Gerade, in welcher sich das Punktsystem befindet, heisst deren Träger, und der Punkt, durch welchen die Strahlen eines Büschels gehen, Scheitel oder Träger desselben. Sind A, B, C, D zwei $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linienpaare} \\ \text{Punktepaare} \end{array} \right\}$, so nennt man auch A und B, C und D zugeordnete $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linien} \\ \text{Punkte} \end{array} \right\}$, und bezeichnet deren Doppelverhältnis mit (A, B, C, D) . Die Beweise der Sätze 222 sind sehr einfach.

223, 224. Siehe Aufg. 185, 187.

225. Wenn zwei $\left\{ \begin{array}{l} \text{projektivische Punktreihen in derselben} \\ \text{projektische Strahlenbüschel denselben} \end{array} \right\}$ Geraden liegen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Scheitel haben} \end{array} \right\}$, so können entsprechende $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punktepaare} \\ \text{Strahlenpaare} \end{array} \right\}$ in einen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt} \\ \text{Strahl} \end{array} \right\}$ zusammenfallen. Sind in dem einen System die Gleichungen von vier Elementen

$$\begin{aligned} V_0 - l_0 \quad V_1 &= 0, & V_0 - l_1 \quad V_1 &= 0, \\ V_0 - m_0 \quad V_1 &= 0, & V_0 - m_1 \quad V_1 &= 0, \end{aligned}$$

und in dem andern System die Gleichungen der entsprechenden Elemente

$$\begin{aligned} V_0 - l_0 \quad V_1 &= 0, & V_0 - l_2 \quad V_1 &= 0, \\ V_0 - m_0 \quad V_2 &= 0, & V_0 - m_1 \quad V_2 &= 0, \end{aligned}$$

so muss das Doppelverhältnis beider Systeme gleich sein, also

$$\frac{l_0 - l_1}{m_0 - l_1} : \frac{l_0 - m_1}{m_0 - m_1} = \frac{l_0 - l_2}{m_0 - l_2} : \frac{l_0 - m_2}{m_0 - m_2}.$$

Diese Gleichung stimmt aber mit der Gleichung der Aufg. 196, 197 überein, die sechs Elemente befinden sich also nach der Definition Aufg. 196, 197 in Involution.

Die zwei $\left\{ \begin{array}{l} \text{projektivischen Punktreihen liegen in einer} \\ \text{projektivischen Büschel gehen durch einen} \end{array} \right\}$ Geraden, man kann also jeden Punkt der Geraden als jeden Punkt, man kann also jeden Strahl des Büschels als jeden von beiden Reihen $\left\{ \begin{array}{l} \text{von beiden Büscheln} \end{array} \right\}$ betrachten, die Elemente sind vertauschungsfähig. Sind jetzt zwei projektivische Punktreihen

in einer Geraden gegeben, ohne dass ein Punkt sich selbst entspricht, so kann man diese in Involution bringen, indem man die Punkte zur Deckung bringt, welche einem und demselben Punkte entsprechen, welche Eigenschaft nur die Gegenpunkte besitzen.

Sind nun U und V die Gegenpunkte, entspricht also dem Punkte U der ersten Reihe der unendlich ferne Punkt $U'\infty$ der zweiten und dem Punkt V der zweiten Reihe der unendlich ferne Punkt $V'\infty$ der ersten Reihe, so entsprechen allen Punkten der einen Reihe, welche auf derselben oder auf verschiedenen Seiten ihres Gegenpunktes liegen, nur solche Punkte der anderen, für welche resp. dasselbe gilt; dabei ist das Produkt aus den Abständen zweier entsprechender Punkte von den Gegenpunkten konstant. Fallen jetzt die Gegenpunkte zusammen, so fallen je zwei entsprechende Punkte entweder auf dieselbe Seite oder auf verschiedene Seiten von ihrem gemeinschaftlichen Gegenpunkte O . In beiden Fällen entsprechen sich die Punkte beider Reihen paarweise doppelt, d. h. irgend einem Punkte der ersten Reihe entspricht der Punkt der zweiten, dem als Element der ersten Reihe jener Punkt als Element der zweiten Reihe entspricht. Fällt der Punkt P der ersten Reihe mit dem Punkte Q der zweiten zusammen, so ist $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$, also $OP' = OQ$, d. h. Q und P' fallen zusammen. Der gemeinsame Gegenpunkt heisst Mittelpunkt der Involution. Der analytische Beweis hierfür ist in den Aufg. 197—202 enthalten. Ähnliches gilt für die Büschel. Liegen je zwei entsprechende Punkte einer Involution von Punktpaaren immer auf ein und derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von ihrem Mittelpunkt, so unterscheidet man resp. gleichlaufende oder elliptische und ungleichlaufende oder hyperbolische Involutionen von Punktpaaren. Aus Aufg. 194, 195 folgt, dass die Doppelemente einer involutorischen Reihe reell oder imaginär sind, jenachdem die entsprechenden Punkte auf gleichen oder entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts liegen; diese Doppelemente, Doppelpunkte, sind eine Eigenschaft der hyperbolischen Involution.

Bei einer elliptischen Involution von Punktpaaren giebt es immer zwei Punkte, aus welchen alle Paare entsprechender

Punkte unter rechtem Winkel erscheinen. Es seien AA' , BB' , CC' etc. entsprechende Paare und O der Mittelpunkt der Involution. Über AA' als Durchmesser beschreibe man einen Kreis und errichte in O auf den Träger der Reihe eine Senkrechte, welche den Kreis in P und P' schneidet, dann folgt aus $CO \cdot CO' = BO \cdot BO' = AO \cdot AO' = PO^2$, dass $\sphericalangle APA' = \sphericalangle AP'A' = \sphericalangle R$. $\sphericalangle CPC' = \sphericalangle CP'C' = \sphericalangle BPB' = \sphericalangle BP'B' = 1R$.

Sind E und F die Doppelemente und O der Gegenpunkt der hyperbolischen Involution, so ist $OE^2 = OF^2 = OA \cdot OA'$, d. h. E , F , A , A' sind vier harmonische Punkte.

Da eine Involution von Strahlenpaaren auf jeder Transversalen (s. Aufg. 189) eine Involution von Punktepaaren bestimmt, so kann man alle Sätze für Strahlenbüschel übersetzen, besonders folgt aus den beiden letzten Sätzen, dass eine Involution von Strahlenpaaren entweder nur ein Paar rechtwinkliger Strahlen oder lauter solche Paare hat.

226, 227, 228, 229, 230. Die Gleichung $\left\{ \begin{array}{l} \text{einer geraden} \\ \text{Linie} \end{array} \right\}$ in homogenen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punktkoordinaten} \\ \text{Linienkoordinaten} \end{array} \right\}$ ist $\left\{ \begin{array}{l} Ax + By + Cz = 0. \\ Au + Bv + Cw = 0. \end{array} \right.$

Die gegebenen homogenen Koordinaten $\left\{ \begin{array}{l} \text{eines Punktes} \\ \text{einer Geraden} \end{array} \right\}$ bestimmen $\left\{ \begin{array}{l} \text{den Punkt} \\ \text{die Gerade} \end{array} \right\}$ unzweideutig, aber durch $\left\{ \begin{array}{l} \text{den gegebenen} \\ \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \end{array} \right\}$ sind die Koordinaten $\left\{ \begin{array}{l} x, y, z \\ u, v, w \end{array} \right\}$ nicht bestimmt, son-

dern nur die Verhältnisse $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{z}, \frac{y}{z} \\ \frac{u}{w}, \frac{v}{w} \end{array} \right\}$. Die homogenen Koordi-

naten repräsentieren $\left\{ \begin{array}{l} \text{den Punkt} \\ \text{die Gerade} \end{array} \right\}$, wenn ihre Verhältnisse ungeändert bleiben; daher giebt es unendlich viele Systeme homogener Koordinaten $\left\{ \begin{array}{l} x, y, z \\ u, v, w \end{array} \right\}$, welche $\left\{ \begin{array}{l} \text{ein und denselben} \\ \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \end{array} \right\}$ darstellen; ihre Verhältnisse ändern sich aber für

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ein und denselben Punkt} \\ \text{ein und dieselbe Gerade} \end{array} \right\}$ nicht. Der Satz 230 folgt aus Satz 102, 103.

231, 232, 233. Die Gleichung $\left\{ \begin{array}{l} \text{der unendlich fernen} \\ \text{Geraden} \\ \text{Punktes} \end{array} \right\}$ ist $\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ w = 0 \end{array} \right\}$ und umgekehrt stellt die Gleichung $\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \text{ die unendlich ferne Gerade} \\ w = 0 \text{ den unendlich fernen Punkt} \end{array} \right\}$ dar.

234, 235. Aus der Gleichung $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$ folgt
 $(a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3) x + (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3) y$
 $- (a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + a_3 \delta_3) = 0.$

Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung $ax + by + c = 0$ überein, wenn ist

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 = a, \quad a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 = b,$$

$$a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + a_3 \delta_3 = -c.$$

Die Grössen a_1, a_2, a_3 kann man immer bestimmen, wenn die drei geraden Linien nicht durch einen Punkt gehen, weil in diesem Falle auch die beliebige Gerade durch den Punkt gehen müsste.

236. Sind die Gleichungen der Seiten des ersten Dreiecks

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

und die Gleichung der Geraden

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0,$$

so sind die Gleichungen des zweiten Dreiecks

$$a'_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0, \quad a_1 A_1 + a'_2 A_2 + a_3 A_3 = 0,$$

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a'_3 A_3 = 0,$$

aus welchen man durch passende Subtraktion die Gleichungen

$$(a_1 - a'_1) A_1 = (a_2 - a'_2) A_2; \quad (a_2 - a'_2) A_2 = (a_3 - a'_3) A_3;$$

$$(a_3 - a'_3) A_3 = (a_1 - a'_1) A_1$$

erhält, welche den Satz beweisen.

237. Es seien A, B, C, D die Ecken des Vierecks, AD und CB schneiden sich in O , AC und BD treffen sich in E , AB und CD gehen durch F . Die Gleichungen von AC, AB, BD seien $AC : A_1 = 0, AB : A_2 = 0, BD : A_3 = 0$, so sind die Gleichungen von

$$\begin{aligned} AD : a_1 A_1 - a_2 A_2 &= 0, & BC : a_2 A_2 - a_3 A_3 &= 0, \\ CD : a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 &= 0, & OE : a_1 A_1 - a_3 A_3 &= 0, \\ EF : a_1 A_1 + a_3 A_3 &= 0, & FO : a_1 A_1 - 2a_2 A_2 + a_3 A_3 &= 0, \\ & & OC : a_2 A_2 - a_3 A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass EA, EB, EO, EF ein harmonisches Büschel bilden, wie auch die Geraden FE, FO, FC, FB und OC, OD, OE, OF .

238. Haben die Seiten des Dreiecks die Gleichungen $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$, so erhält man nach Aufg. 79 die Gleichungen der übrigen Geraden durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen, welche man wie in Aufg. 93 verbindet. So sind z. B. im Falle 7 die Gleichungen der drei Perpendikel

$$\begin{aligned} \cos a_1 \cdot A_1 - \cos a_2 \cdot A_2 &= 0, & \cos a_2 \cdot A_2 - \cos a_3 \cdot A_3 &= 0, \\ \cos a_3 \cdot A_3 - \cos a_1 \cdot A_1 &= 0. \end{aligned}$$

239. Die Grössen $-A_1, -A_2, -A_3$ sind gleich den Entfernungen des Punktes x, y von den entsprechenden Dreiecksseiten.

240. Ist

$$\begin{aligned} A_1 &= a'_1 u + b'_1 v + 1, & A_2 &= a'_2 u + b'_2 v + 1, \\ A_3 &= a'_3 u + b'_3 v + 1, \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 &= a, & a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3 &= b, \\ a_1 + a_2 + a_3 &= c. \end{aligned}$$

241. Die Grössen mA_1, mA_2, mA_3 bestimmen die Senkrechten der entsprechenden Punkte von der Geraden u, v .

242. Man bringe die Gleichungen in der allgemeinen Form einfach auf die Normalform.

243. Die Bedingungsgleichung ist

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 - (a_2 a'_3 + a'_2 a_3) \cos M_1 \\ &\quad - (a_3 a'_1 + a'_3 a_1) \cos M_2 - (a_1 a'_2 + a'_1 a_2) \cos A_3. \end{aligned}$$

244. Es ist $a_3 = a_1 \cos M_2$ und die Gleichung der Normalen $A_1 + A_3 \cos A_2 = 0$.

245. Ist die Länge der Geraden $M_1 M_2$ gleich l , so gehen durch den betreffenden Punkt die Geraden $A_3 = 0$,

$A_1(l - p) \sin M_1 - A_2 p \sin M_2 = 0$; es ist daher die Gleichung einer Geraden durch den Punkt von der Form

$$A_1(l - p) \sin M_1 - A_2 p \sin M_2 + a_3 A_3 = 0.$$

Damit diese Linie auf $A_3 = 0$ senkrecht steht, muss sein

$$a_3 = (l - p) \sin M_1 \cdot \cos M_2 - p \sin M_2 \cos M_1.$$

Ist $p = \frac{l}{2}$, so ist $a_3 = \frac{l}{2} \sin(M_1 - M_2)$ und die Gleichung der

Senkrechten heisst $A_1 \sin M_1 - A_2 \sin M_2 + A_3 \sin(M_1 - M_2) = 0$.

246. Die trigonometrische Tangente des Winkels ist

$$\frac{(a_2 a'_3 - a'_2 a_3) \sin M_1 + (a_3 a'_1 - a'_3 a_1) \sin M_2 + (a_1 a'_2 - a'_1 a_2) \sin M_3}{a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 - (a_2 a'_3 + a'_2 a_3) \cos M_1 - (a_3 a'_1 + a'_3 a_1) \cos M_2 - (a_1 a'_2 + a'_1 a_2) \cos M_3}.$$

Verschwindet der Nenner, so stehen die Geraden senkrecht, wird der Zähler zu Null, so laufen die Geraden parallel.

$$\begin{aligned} \text{247. } A_1(A'_2 \cos A_2 - A'_3 \cos A_3) - A_2(A'_3 + A'_1 \cos A_2) \\ + A_3(A'_2 + A'_1 \cos A_3) = 0. \end{aligned}$$

248. Es ist $a = \kappa A_1$, $b = \lambda A_2$, $c = \mu A_3$; bilden die Richtungslinien mit den Dreiecksseiten resp. rechte Winkel, so werden a , b , c zu $-A_1$, $-A_2$, $-A_3$.

249. Die Grössen ma , mb , mc stellen denselben Punkt dar wie a , b , c .

$$\begin{aligned} \text{250. Es ist } a &= r^0 x + s^0 y + t^0 z, \\ b &= r' x + s' y + t' z, \\ c &= r'' x + s'' y + t'' z, \end{aligned}$$

wo die neun Koeffizienten nur von dem Dreieck und den Richtungslinien abhängt. Es sind $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ die Seiten des Koordinatendreiecks.

251. Es ist

$$\sin(aA'_1) = -\frac{1}{\kappa}, \quad \sin(bA'_2) = -\frac{1}{\lambda}, \quad \sin(cA'_3) = -\frac{1}{\mu}.$$

252. Aus Aufg. 250 erhält man

$$\begin{aligned} x &= r_0 a + r_1 b + r_2 c, \\ y &= s_0 a + s_1 b + s_2 c, \\ z &= t_0 a + t_1 b + t_2 c. \end{aligned}$$

253. Man erhält

$$\begin{aligned} \alpha &= r_0 u + s_0 v + t_0 w \\ \beta &= r_1 u + s_1 v + t_1 w, \\ \gamma &= r_2 u + s_2 v + t_2 w. \end{aligned}$$

254. Es ist

$$\begin{aligned} u &= r^0 \alpha + r' \beta + r'' \gamma, \\ v &= s^0 \alpha + s' \beta + s'' \gamma, \\ w &= t^0 \alpha + t' \beta + t'' \gamma. \end{aligned}$$

255. Dieser Satz folgt aus 250 und 254.

256. Sind L, N, P die Schnittpunkte der geraden Linie auf den Seiten $M_2 M_3, M_3 M_1, M_1 M_2$, so erhält man diese aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \quad M_1 L : a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0; \\ A_2 &= 0, \quad M_2 N : a_3 A_3 + a_1 A_1 = 0; \\ A_3 &= 0, \quad M_3 P : a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0. \end{aligned}$$

Die geraden Linien $M_1 L, M_2 N, M_3 P$ teilen die Winkel M_1, M_2, M_3 , dass das Verhältniss der Sinus der Teilwinkel ist $a_2 : a_3, a_3 : a_1, a_1 : a_2$, wenn in Aufg. 248 $\kappa = \lambda = \mu = 1$ ist. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass

257. $A_1 \sin M_1 + A_2 \sin M_2 + A_3 \sin M_3 = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden ist.

258, 259. Der doppelte Inhalt des Dreiecks ist:

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 + s_3 A_3 = J$$

für einen endlichen Punkt. Ist $J = 0$, so stellt die Gleichung die unendlich ferne Gerade dar.

260. Durch Multiplikation von J (Aufg. 258) erhält man

$$J A_1 = p (s_1 A_1 + s_2 A_2 + s_3 A_3).$$

$$\begin{aligned} 261. \quad & a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \\ & + \kappa (A_1 \sin M_1 + A_2 \sin M_2 + A_3 \sin M_3) = 0. \end{aligned}$$

262. Die Gleichung stellt eine Gerade durch den Punkt $A_1 = 0, A_2 = 0$, welche der Geraden $A_3 = 0$ parallel läuft, dar.

263. Die vier Geraden bilden ein harmonisches Büschel.

264. Mit der Bezeichnung der Aufg. 256—260 ist die gesuchte Entfernung

$$\begin{aligned} D^2 = - \frac{s_1 s_2 s_3}{J^2} \{ & s_1 (A'_2 - A''_2) (A'_3 - A''_3) + s_2 (A'_3 - A''_3) (A'_1 - A''_1) \\ & + s_3 (A'_1 - A''_1) (A'_2 - A''_2) \}. \end{aligned}$$

Dies kann man ableiten dadurch, dass man A_1, A_2, A_3 in voller Länge einführt und substituiert.

265. Der doppelte Inhalt dieses Dreiecks ist

$$\frac{s_1 s_2 s_3}{J^2} (a_1 A'''_1 + a_2 A'''_2 + a_3 A'''_3).$$

Siehe Aufl. 258.

266. Die Koordinaten sind

$$aA'_1 + bA''_1; aA'_2 + bA''_2; aA'_3 + bA''_3.$$

267. Die Gleichungen der Verbindungslinien der Ecken mit den Seitenmitten sind

$$\begin{aligned} A_1 \sin M_1 - A_2 \sin M_2 &= 0, & A_2 \sin M_2 - A_3 \sin M_3 &= 0, \\ A_3 \sin M_3 - A_1 \sin M_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Höhen sind

$$\begin{aligned} A_1 \cos M_1 - A_2 \cos M_2 &= 0, & A_2 \cos M_2 - A_3 \cos M_3 &= 0, \\ A_3 \cos M_3 - A_1 \cos M_1 &= 0 \end{aligned}$$

und die Gleichungen der Senkrechten in den Seitenmitten:

$$\begin{aligned} A_3 \sin M_3 - A_2 \sin M_2 + A_1 \sin (M_3 - M_2) &= 0, \\ A_1 \sin M_1 - A_3 \sin M_3 + A_2 \sin (M_1 - M_3) &= 0, \\ A_2 \sin M_2 - A_1 \sin M_1 + A_3 \sin (M_2 - M_1) &= 0. \end{aligned}$$

Die Dreieckskoordinaten der resp. Schnittpunkte sind

$$\begin{aligned} &\sin M_2 \sin M_3, \quad \sin M_1 \sin M_3, \quad \sin M_1 \sin M_2; \\ &\cos M_2 \cos M_3, \quad \cos M_1 \cos M_3, \quad \cos M_1 \cos M_2; \\ &\cos (M_2 + M_3), \quad \cos (M_1 + M_3), \quad \cos (M_1 + M_2). \end{aligned}$$

Liegen die beiden ersten Punkte auf der Geraden

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 0,$$

so muss sein

$$\begin{aligned} a_1 \cos M_2 \cos M_3 + a_2 \cos M_1 \cos M_3 + a_3 \cos M_1 \cos M_2 &= 0, \\ a_1 \sin M_2 \sin M_3 + a_2 \sin M_1 \sin M_3 + a_3 \sin M_1 \sin M_2 &= 0 \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$a_1 \cos (M_2 \pm M_3) + a_2 \cos (M_3 \pm M_1) + a_3 \cos (M_1 \pm M_2) = 0,$$

d. h. der dritte Punkt liegt auch auf der Geraden, ausserdem aber noch der Punkt $\cos (M_2 - M_3), \cos (M_3 - M_1), \cos (M_1 - M_2)$, dieser Punkt ist zu den drei anderen ein vierter harmonischer Punkt.

268. Die Gleichungen des Koordinatendreiecks seien $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ und

$$\begin{aligned} a &= r^0 x + s^0 y + t^0 z, \\ b &= r^1 x + s^1 y + t^1 z, \\ c &= r^2 x + s^2 y + t^2 z, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}x &= r_0 a + r_1 b + r_2 c, \\y &= s_0 a + s_1 b + s_2 c, \\z &= t_0 a + t_1 b + t_2 c.\end{aligned}$$

Durch diese Substitutionen soll die Gleichung einer beliebigen geraden Linie

$$ux + vy + wz = 0$$

in die Gleichung

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0$$

übergehen, dann hat man

$$\begin{aligned}A_1 &= r_0 u + s_0 v + t_0 w, \\A_2 &= r_1 u + s_1 v + t_1 w, \\A_3 &= r_2 u + s_2 v + t_2 w,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}u &= r^0 A_1 + r' A_2 + r^2 A_3, \\v &= s^0 A_1 + s' A_2 + s^2 A_3, \\w &= t^0 A_1 + t' A_2 + t^2 A_3.\end{aligned}$$

Siehe Aufg. 252—254.

Die Koordinaten der geraden Linie durch den Punkt $A_1 = 0$ und $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$ erhält man aus den Gleichungen

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0, \quad A_1 = 0,$$

also ist

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{1}{a_2}, \quad A_3 = -\frac{1}{a_3}.$$

Ebenso erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{1}{a_1}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{1}{a_3}; \\A_1 &= \frac{1}{a_1}, \quad A_2 = -\frac{1}{a_2}, \quad A_3 = 0.\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit a, b, c , addiert die Produkte, so hat man als Gleichungen der drei Geraden

$$\frac{b}{a_2} - \frac{c}{a_3} = 0, \quad \frac{b}{a_3} - \frac{a}{a_1} = 0, \quad \frac{a}{a_1} - \frac{b}{a_2} = 0.$$

Dies kann man auch durch Vergleichung der Gleichungen

$$\begin{aligned}aA_1 + bA_2 + cA_3 &= 0, \\a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 &= 0\end{aligned}$$

finden. Lässt man in beiden Gleichungen A_1, A_2, A_3 konstant sein, so geht die gerade Linie durch den Punkt, dessen Drei-

eckskoordinaten sind $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$. Die Gerade, welche durch den Schnittpunkt von $a = 0$, $b = 0$ geht, hat die Gleichung

$$m_1 a + m_2 b = 0,$$

und da sie durch $a = a_1$, $b = a_2$ gehen soll, so ist $m_1 = -\frac{a_2}{a_1} m_2$ u. s. w.

Die Grössen a , b , c sind gegeben, wenn A_1 , A_2 , A_3 bekannt sind und umgekehrt.

269. Nach 268 kann man a , b , c aus A_1 , A_2 , A_3 ableiten und dann nach Aufg. 259 den Inhalt angeben.

270. Man führe diese Aufgabe auf Aufg. 266 zurück, indem man die Schenkel durch eine gerade Linie schneidet, dann die Aufg. 189 benutzt und von den Linienkoordinaten nach 268 zu Punktkoordinaten des Dreiecksystems übergeht.

271. Diese Aufgaben löst man mit Hilfe von 266, 270.

272, 273, 274, 275, 276. Die Gleichungen der drei Geraden M , N , P seien in rechtwinkligen Koordinaten $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, dann hat irgend eine Gerade eine Gleichung von der Form

$$\frac{m_{00}}{m_{01} m_{20}} M + \frac{N}{m_{20}} + \frac{P}{m_{01}} = 0 \equiv M' \frac{\kappa}{m_{01} m_{20}}.$$

Diese Gleichungen und die zwei folgenden

$$\frac{M}{m_{12}} + \frac{m_{11}}{m_{12} m_{01}} N + \frac{P}{m_{01}} = 0, \equiv N' \frac{\lambda}{m_{12} m_{01}}$$

$$\frac{M}{m_{12}} + \frac{N}{m_{20}} + \frac{m_{22}}{m_{12} m_{20}} P = 0, \equiv P' \frac{\mu}{m_{12} m_{20}}$$

stellen alle Geraden dar, welche sich um den Schnittpunkt der Geraden

$$\frac{M}{m_{12}} + \frac{N}{m_{20}} + \frac{N}{m_{01}} = 0 \equiv R$$

mit den Geraden MNP beliebig drehen. Es ist aber, wenn $m_{rs} = m_{sr}$ ist,

$$\kappa M' \equiv m_{00} M + m_{01} N + m_{02} P,$$

$$\lambda N' \equiv m_{10} M + m_{11} N + m_{12} P,$$

$$\mu P' \equiv m_{20} M + m_{12} N + m_{22} P.$$

Die neuen Koeffizienten müssen sich so bestimmen lassen, dass den Gleichungen identisch genügt wird, wenn die Gleich-

ungen $M = 0$, $M' = 0$; $N = 0$, $N' = 0$; $P = 0$, $P' = 0$ Linienpaare darstellen, welche sich in drei Punkten der Geraden R schneiden. Setzt man

$$m_{01}m_{02} - m_{00}m_{12} \equiv n_{12}, \quad m_{10}m_{12} - m_{11}m_{20} \equiv n_{20}, \quad m_{20}m_{21} - m_{22}m_{01} \equiv n_{01},$$

$$\frac{m_{12} m_{20} m_{01}}{n_{12}} M_1 \equiv M, \quad \frac{m_{12} m_{20} m_{01}}{n_{20}} N_1 \equiv N, \quad \frac{m_{12} m_{20} m_{01}}{n_{01}} P_1 \equiv P,$$

und

$$- \frac{m_{12} m_{20} m_{01}}{m_{12}} M'_1 \equiv \kappa M', \quad - \frac{m_{12} m_{20} m_{01}}{m_{20}} N'_1 \equiv \lambda N',$$

$$- \frac{m_{12} m_{20} m_{01}}{m_{01}} P'_1 \equiv \mu P',$$

so sind die Gleichungen der Linienpaare

$$M_1 = 0, \quad M'_1 = 0; \quad N_1 = 0, \quad N'_1 = 0; \quad P_1 = 0, \quad P'_1 = 0;$$

und

$$R \equiv m_{12} m_{20} m_{01} \left\{ \frac{M_1}{m_{12} n_{12}} + \frac{N_1}{m_{20} n_{20}} + \frac{P_1}{m_{01} n_{01}} \right\} = 0,$$

$$M_1 - M'_1 \equiv R, \quad N_1 - N'_1 \equiv R, \quad P_1 - P'_1 \equiv R.$$

277—287. Das gegebene Pascalsche Sechseck habe die Ecken 1 2 3 4 5 6. Der Schnittpunkt von 16, 23 sei E , der von 12, 34 sei H , der von 12, 56 sei A , der von 23, 45 sei D , der von 34, 56 sei B , der von 54, 61 sei G und der Punkt 1 sei mit F und Punkt 4 mit C bezeichnet. Die Gleichungen der Seiten 12, 34, 56 seien $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ und die Gleichung der Pascalschen Geraden sei $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$. Es haben die Gleichungen der geraden Linien 23, 45, 61 die Form $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a'_3 A_3 = 0$, $a'_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$, $a_1 A_1 + a'_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$. Die Gleichungen von AD , BE , GH sind resp. $(a'_1 - a_1) A_1 = (a'_3 - a_3) A_3$, $(a'_3 - a_3) A_3 = (a'_2 - a_2) A_2$, $(a'_2 - a_2) A_2 = A_1 (a'_1 - a_1)$. Addiert man diese Gleichungen, so erhält man identisch Null; nach Satz 64 schneiden sich also EB , GH , DA in einem Punkte J .

Berechnet man aus den in x, y linearen Gleichungen $A_n = 0$, $A_p = 0$ die Grössen x, y , setzt deren Werte in den ebenfalls in x, y linearen Ausdruck A_m , so soll der erhaltene Wert von A_m mit $A_m^{np} = A_m^{pn}$ bezeichnet werden. Stellen die Gleichungen $A_n = 0$, $A_p = 0$, $A_m = 0$ gerade Linien in der Normalform da, so ist $-A_m^{np}$ die Entfernung des Schnitt-

punktes der geraden Linien $A_n = 0$, $A_p = 0$ von der geraden Linie $A_m = 0$. Es seien die Gleichungen von 23, 45, 61 resp. $A_6 = 0$, $A_4 = 0$, $A_5 = 0$.

Es ist $a_1 A_1^{25} = -a_3 A_3^{25}$, $a_2 A_2^{36} = -a_1 A_1^{36}$, $a_3 A_3^{14} = -a_2 A_2^{14}$, also

$$\frac{A_1^{36} \cdot A_3^{25} \cdot A_2^{14}}{A_1^{25} \cdot A_3^{14} \cdot A_2^{36}} = -1.$$

Die Gleichung der Pascalschen Geraden kann man aber auch schreiben

$$A_1 + l A_4 = 0, \quad A_2 + m A_5 = 0, \quad A_3 + n A_6 = 0.$$

Hieraus folgt

$$l = -\frac{A_1^{25}}{A_4^{25}} = -\frac{A_1^{36}}{A_4^{36}}, \quad m = -\frac{A_2^{14}}{A_5^{14}} = -\frac{A_2^{36}}{A_5^{36}},$$

$$n = -\frac{A_3^{14}}{A_6^{14}} = -\frac{A_3^{25}}{A_6^{25}}.$$

Also ist auch

$$\frac{A_4^{36}}{A_4^{25}} \cdot \frac{A_5^{14}}{A_6^{24}} \cdot \frac{A_6^{25}}{A_5^{36}} = -1.$$

Schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks in den Punkten (12, 45) : X , (23, 56) : Y , (34, 61) : Z , so ist

$$\frac{XH \cdot ZB \cdot YA}{XA \cdot ZH \cdot YB} = -1.$$

Liegen umgekehrt auf den Dreiecksseiten ABH drei Punkte so, dass die letzte Gleichung besteht, so befinden sich die Punkte in einer geraden Linie.

Da das Sechseck mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 ein Pascalsches Sechseck ist, so ist natürlich das Sechseck mit den Seiten 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, 5 6, 6 1 auch ein Pascalsches Sechseck. Es sind aber auch die Sechsecke mit den Seiten-

1 2, 2 3, 6 1, 4 5, 5 6, 3 4

1 2, 5 6, 3 4, 4 5, 2 3, 6 1 oder mit den Ecken $ABCDEF$

1 2, 5 6, 6 1, 4 5, 2 3, 3 4

Pascalsche Sechsecke mit denselben Pascalschen Geraden. Es ist nicht nur $ABCDEF$ ein Pascalsches Sechseck, sondern

auch das Sechseck $EBCDAF$ ist ein solches; denn es schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten: EB und DA in J , BC und AF in H , CD und FA in G , und diese Punkte liegen in der geraden Linie JHG . Ist jetzt umgekehrt das Sechseck $ABCDEF$ oder 1 2, 5 6, 3 4, 4 5, 2 3, 6 1 gegeben, so ist auch das Sechseck 1 2 3 4 5 6 ein Pascalsches Sechseck; es liegen dann JHG in einer geraden Linie, mithin ist das Sechseck $EBCDAF$ ein Pascalsches Sechseck. Es sind mithin auch die beiden Sechsecke 1 2 3 4 5 6 und 5 2 3 4 1 6 Pascalsche Sechsecke. Geht man von dem Sechseck 2 3 4 5 6 1 aus, so findet man, dass auch das Sechseck 6 3 4 5 2 1 ein Pascalsches Sechseck ist. Da das zweite Sechseck aus dem ersten durch Vertauschung von zwei Zahlen entsteht, so ist damit bewiesen, dass alle sechzig Sechsecke durch die gegebenen Ecken Pascalsche Sechsecke sind, wenn eines derselben ein Pascalsches Sechseck ist.

Es hat das Pascalsche Sechseck 1 2 3 6 5 4 die Pascalsche Gerade AD , das Pascalsche Sechseck 1 6 5 2 3 4 die Pascalsche Gerade EB und das Sechseck 1 2 5 4 3 6 die Pascalsche Gerade GH . Diese drei geraden Linien schneiden sich in einem Steinerschen Punkte. Mit Hilfe von Permutationen findet man, dass auf jeder Pascalschen Geraden nur ein Steinerscher Punkt liegt, dass es also zwanzig Steinersche Punkte giebt. Es haben also die Sechsecke 1 2 3 4 5 6, 1 4 3 6 5 2, 1 6 3 2 5 4 drei Pascalsche Geraden, welche sich in einem Steinerschen Punkte schneiden. Dass sich die drei geraden Linien in einem Steinerschen Punkte schneiden, kann man symbolisch darstellen durch

$$\begin{cases} 1\ 2, & 4\ 5, & 6\ 3, \\ 5\ 6, & 2\ 3, & 1\ 4, \\ 3\ 4, & 6\ 1, & 5\ 2. \end{cases}$$

Fasst man die Elemente der ersten Vertikalreihe mit den entsprechenden der zweiten Vertikalreihe zusammen, so erhält man die Punkte, durch welche die erste Pascalsche Gerade geht; ebenso liefern die Elemente der ersten und dritten Vertikalreihe die zweite Pascalsche Gerade und die Elemente der zweiten und dritten Vertikalreihe die dritte Pascalsche Gerade. Die Pascalsche Gerade des Sechsecks 1 2 3 4 5 6 kann

man bezeichnen mit $\begin{pmatrix} 1\ 2, & 3\ 4, & 5\ 6 \\ 4\ 5, & 6\ 1, & 2\ 3 \end{pmatrix}$. Betrachtet man die Dreiecke mit den Seiten

$$1) \quad 1\ 2, \quad 3\ 4, \quad 5\ 6,$$

$$2) \quad \begin{pmatrix} 1\ 2, & 3\ 5, & 4\ 6 \\ 4\ 5, & 6\ 2, & 2\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3\ 4, & 2\ 6, & 1\ 5 \\ 1\ 6, & 3\ 5, & 2\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5\ 6, & 2\ 4, & 1\ 3 \\ 2\ 3, & 1\ 5, & 4\ 6 \end{pmatrix},$$

$$3) \quad \begin{pmatrix} 1\ 2, & 3\ 5, & 4\ 6 \\ 3\ 6, & 2\ 4, & 1\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3\ 4, & 2\ 6, & 6\ 1 \\ 2\ 5, & 1\ 3, & 4\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5\ 6, & 2\ 4, & 1\ 3 \\ 1\ 4, & 3\ 6, & 2\ 5 \end{pmatrix},$$

so sind die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten von 1 und 2 drei Punkte derselben Pascalschen Geraden und die Verbindungslinien entsprechender Ecken gehen durch einen Punkt. Diese Verbindungslinien sind aber die Pascalschen Geraden der Sechsecke 1 2 6 4 3 5, 1 3 4 2 6 5, 1 2 4 6 5 3. Den Schnittpunkt der drei Pascalschen Geraden — den Kirkmanschen Punkt — kann man symbolisch darstellen:

$$H \begin{cases} 1\ 2, & 4\ 3, & 5\ 6, & 1\ 2, \\ 6\ 4, & 5\ 1, & 4\ 2, & 5\ 3, \\ 3\ 5, & 2\ 6, & 1\ 3, & 4\ 6, \end{cases}$$

wo die Elemente der ersten und zweiten Vertikalreihe die erste Pascalsche Gerade, die Elemente der zweiten und dritten Vertikalreihe die zweite Pascalsche Gerade und die Elemente der dritten und vierten Reihe die dritte Pascalsche Gerade andeuten. Auf jeder Pascalschen Geraden liegen drei Punkte H . Auf der Pascalschen Geraden des Sechsecks 1 2 3 4 5 6 liegen die Kirkmanschen Punkte

$$H_1 \begin{cases} 1\ 2, & 4\ 5, & 3\ 6, & 1\ 2, \\ 3\ 4, & 6\ 1, & 2\ 4, & 5\ 6, \\ 5\ 6, & 2\ 3, & 1\ 5, & 3\ 4; \end{cases} \quad H_2 \begin{cases} 1\ 2, & 4\ 5, & 1\ 3, & 5\ 6, \\ 3\ 4, & 6\ 1, & 2\ 5, & 3\ 4, \\ 5\ 6, & 2\ 3, & 4\ 6, & 1\ 2; \end{cases}$$

$$H_3 \begin{cases} 1\ 2, & 4\ 5, & 2\ 6, & 3\ 4, \\ 3\ 4, & 6\ 1, & 3\ 5, & 1\ 2, \\ 5\ 6, & 2\ 3, & 1\ 4, & 5\ 6. \end{cases}$$

Betrachtet man die Dreiecke 1 und 3, so sind die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken dieselben, wie für 1 und 2, und die entsprechenden Seiten schneiden sich also in einer Geraden, welche eine Pascalsche Gerade ist. Endlich schneiden sich die entsprechenden Seiten von 2 und 3 in drei Punkten einer geraden Linie, d. h. die drei Punkte

$$\begin{cases} 1\ 2, 4\ 5, 3\ 6, 1\ 2, \\ 3\ 5, 2\ 6, 1\ 5, 4\ 6, \\ 4\ 6, 1\ 3, 2\ 4, 5\ 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 1\ 5, 2\ 4, 1\ 3, 2\ 6, \\ 3\ 4, 1\ 6, 2\ 5, 3\ 4, \\ 2\ 6, 3\ 5, 4\ 6, 1\ 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\ 3, 4\ 6, 3\ 5, 2\ 4, \\ 2\ 4, 1\ 5, 2\ 6, 1\ 3, \\ 5\ 6, 2\ 3, 1\ 4, 5\ 6 \end{cases}$$

liegen in einer geraden Linie. Da aber die Axe der Kollineation von 2 und 3 durch den Schnittpunkt der Axen von 1 2 und 1 3 geht, d. h. durch den Steinerschen Punkt:

$$\begin{cases} 1\ 2, 4\ 5, 3\ 6, \\ 3\ 4, 1\ 6, 2\ 5, \\ 6\ 6, 2\ 3, 1\ 4. \end{cases}$$

Es giebt also sechzig Kirkmansche Punkte; auf zwanzig geraden Linien liegen je drei Kirkmansche Punkte und ein Steinerscher Punkt. Die drei Pascalschen Geraden

$$\begin{pmatrix} 1\ 2, 3\ 5, 4\ 6 \\ 4\ 5, 2\ 6, 1\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\ 5, 2\ 6, 1\ 3 \\ 3\ 6, 1\ 5, 2\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\ 6, 1\ 5, 2\ 4 \\ 1\ 2, 4\ 6, 3\ 5 \end{pmatrix}$$

schneiden sich in einem Kirkmanschen Punkte. Auf diesen Pascalschen Geraden liegen resp. die Punkte (4 6, 1 3), (2 6, 1 5), (2 4, 3 5). Man hat also ein Dreieck mit den Seiten

$$\begin{pmatrix} 1\ 3, 2\ 6, 4\ 5 \\ 4\ 6, 1\ 5, 2\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\ 6, 3\ 5, 1\ 4 \\ 1\ 5, 2\ 4, 3\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\ 4, 1\ 3, 5\ 6 \\ 3\ 5, 4\ 6, 1\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch Kirkmansche Punkte der ersten drei Pascalschen Geraden gehen die folgenden Dreiecksseiten:

$$\begin{pmatrix} 1\ 3, 2\ 6, 4\ 5 \\ 2\ 5, 3\ 4, 1\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\ 6, 1\ 5, 2\ 4 \\ 2\ 5, 3\ 4, 1\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\ 6, 1\ 2, 3\ 5 \\ 2\ 5, 3\ 4, 1\ 6 \end{pmatrix}.$$

Da die Ecken dieser Dreiecke auf drei durch einen Punkt gehenden geraden Linien liegen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten dieser Dreiecke in Punkten einer geraden Linie, d. h. die Steinerschen Punkte

$$\begin{cases} 2\ 5, 1\ 3, 4\ 6, \\ 3\ 4, 2\ 6, 1\ 5, \\ 1\ 6, 4\ 5, 2\ 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\ 5, 3\ 6, 1\ 4, \\ 3\ 4, 1\ 5, 2\ 6, \\ 1\ 6, 2\ 4, 3\ 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\ 5, 4\ 6, 1\ 3, \\ 3\ 4, 1\ 2, 5\ 6, \\ 1\ 6, 3\ 5, 2\ 4 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} 2\ 5, 3\ 6, 1\ 4, \\ 3\ 4, 1\ 2, 5\ 6, \\ 1\ 6, 5\ 4, 2\ 3 \end{cases}$$

liegen in einer geraden Linie. Die Steinerschen Punkte liegen zu vieren in fünfzehn geraden Linien.

Der bei der Ableitung der Kirkmanschen Punkte benutzte Satz: „Wenn drei Dreiecke dreien geraden Linien, welche sich in einem Punkte schneiden, einbeschrieben sind, so bilden die entsprechenden Seiten der drei Dreiecke wieder drei Dreiecke, welche drei geraden Linien einbeschrieben sind, die von einem anderen Punkte ausgehen“, ist leicht zu beweisen. Sind nämlich die Ecken der drei Dreiecke ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$ und liegen $AA'A''$ auf einer geraden Linie durch den Punkt O , $BB'B''$ auf einer Linie durch O und $CC'C''$ auf einer geraden Linie durch O ; schneiden sich AB , $A'B'$ in N , $A'C'$ und AC in P , BC und $B'C'$ in M , so liegen MNP in einer geraden Linie; ebenso liegen die Punkte $(AB, A''B'') : N_1$, $(AC, A''C'') : P_1$ und $(BC, B''C'') : M_1$ in einer geraden Linie, wie auch die Punkte $(A'B', A''B'') : N_2$, $(A'C', A''C'') : P_2$, $(B'C', B''C'') : M_2$. Man hat also die Dreiecke MM_1M_2 , NN_1N_2 , PP_1P_2 . Es schneiden sich aber die entsprechenden Seiten in drei Punkten, welche auf einer geraden Linie liegen, also schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einem Punkte, und zwar sind es die geraden Linien MNP , $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$, womit der Satz bewiesen ist.

Es sei das Pascalsche Sechseck 1 2 3 4 5 6 gegeben, die Gleichungen der Seiten seien

$$\begin{aligned}(1\ 2) &= a' = 0, & (2\ 3) &= b = 0, & (3\ 4) &= c' = 0, \\(4\ 5) &= a = 0, & (5\ 6) &= b' = 0, & (6\ 1) &= c = 0, \\(1\ 4) &= b'' = 0, & (2\ 5) &= c'' = 0, & (3\ 6) &= a'' = 0.\end{aligned}$$

Die Gleichungen seien schon mit den Koeffizienten versehen, dass die Gleichung der Pascalschen Linie von 1 2 3 4 5 6 dargestellt wird unter den Formen

$$a - a' \equiv p'', \quad b - b' \equiv p'', \quad c - c' \equiv p'', \quad p'' = 0.$$

Die Pascalsche Gerade des Sechsecks 1 4 3 6 5 2 hat eine Gleichung von den Formen

$$a' - a'' \equiv p, \quad b' - b'' \equiv p, \quad c' - c'' \equiv p, \quad p = 0.$$

Durch den Schnittpunkt dieser Geraden geht die Pascalsche Gerade des Sechsecks 1 6 3 2 5 4, welche also dargestellt werden kann durch die Gleichungen $a'' - a \equiv p'$, $b'' - b \equiv p'$,

$c'' - c \equiv p''$, $p'' = 0$, und es ist $p + p' + p'' \equiv 0$. Setzt man $b - c \equiv p_1$, so ist auch $b' - c' \equiv p_1$, die gerade Linie $p_1 = 0$ ist also die Pascalsche Gerade des Sechsecks 1 4 3 2 5 6; es ist auch $p_1 \equiv b'' - c''$. Ebenso stellen die Gleichungen $c - a \equiv p'_1$, $c' - a' \equiv p'_1$, $c'' - a'' \equiv p'_1$, $p'_1 = 0$ die Pascalsche Gerade des Sechsecks 1 6 3 4 5 2 dar, und die Gleichungen $p''_1 \equiv a - b$, $p''_1 \equiv a' - b'$, $p''_1 \equiv a'' - b''$, $p''_1 = 0$ die Pascalsche Gerade des Sechsecks 1 2 3 6 5 4 dar. Es ist $p_1 + p'_1 + p''_1 \equiv 0$. Die drei ersten Pascalschen Geraden, welche durch einen Steinerschen Punkt gehen, haben also die Gleichungen $p' = 0$, $p'' = 0$, $p' + p'' = 0$, die zu diesen geraden Linien vierte harmonische Linie hat die Gleichung $p' - p'' = 0$. Setzt man

$p'' - p' \equiv r$, $p - p'' \equiv r'$, $p' - p'' \equiv r''$, $p''_1 - p'_1 \equiv r_1$, $p_1 - p''_1 \equiv r'_1$, $p'_1 - p \equiv r''_1$, so stellen die Gleichungen $r = 0$, $r' = 0$, $r'' = 0$, $r_1 = 0$, $r'_1 = 0$, $r''_1 = 0$ die Gleichungen der vierten harmonischen Linien der betreffenden Pascalschen Geraden dar.

Aus den Gleichungen folgt aber

$$\begin{aligned} r + r_1 &\equiv 3a, & r' + r_1 &\equiv 3a', & r'' + r_1 &\equiv 3a'', \\ r + r'_1 &\equiv 3b, & r' + r'_1 &\equiv 3b', & r'' + r'_1 &\equiv 3b'', \\ r + r''_1 &\equiv 3c, & r' + r''_1 &\equiv 3c', & r'' + r''_1 &\equiv 3c'', \end{aligned}$$

d. h. die betreffenden vierten harmonischen Linien schneiden sich auf den Seiten und Diagonalen des Sechsecks. Vertauscht man „gerade Linien“ mit „Punkte“, so erhält man die Sätze des Brianchonschen Sechsecks.

Über Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen.

288. Die geraden Linien $x = 5$, $x = -5$.

289. Die Doppelgerade $x = -1$.

290. Die dreifache gerade Linie $x = -1$.

291. Die Gleichung stellt die geraden Linien $x - y = 0$, $x + y = 0$, $x - 6y = 0$ dar.

292. Die Gleichungen des Ortes sind $x + y = 0$, $3x + y = 0$.

293. $x = 0$, $y = 0$.

294. $x = y(3 + \sqrt{9 \sin^2 \vartheta - 1})$, $x = y(3 - \sqrt{9 \sin^2 \vartheta - 1})$.

295. Die Gleichung stellt die dreifache gerade Linie $(x - y) = 0$ und die dreifache gerade Linie $(x + y) = 0$ dar.

296. Die Gleichung stellt zwei durch den Koordinatenanfang gehende gerade Linien dar, welche reell sind, solange $B^2 - 4AC$ positiv ist, welche zusammenfallen, wenn $B^2 - 4AC = 0$ ist, und imaginär sind, wenn $B^2 - 4AC$ negativ ist.

297. Die Gleichung stellt die geraden Linien $x = y$, $x = -y$, $x = 2$, $x = 3$ dar.

298. Der Winkel ist gegeben durch die Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{1 + q}.$$

299. 1) Die beiden geraden Linien stehen senkrecht; 2) die beiden geraden Linien sind imaginär.

300. Setzt man $\frac{b}{a} = 2p$, $\frac{c}{a} = q$, so stellt die Gleichung die geraden Linien

$$x = y (-p + \sqrt{p^2 - q}), \quad x = y (-p - \sqrt{p^2 - q})$$

dar, welche mit der Axe der x die durch die Gleichungen

$$-p + \sqrt{p^2 - q} = \cotg \psi, \quad -p - \sqrt{p^2 - q} = \cotg (\psi + \varphi)$$

bestimmten Winkel bilden; der Winkel φ zwischen den geraden Linien ist also gegeben durch die Gleichung $\cotg \varphi = \frac{1 + q}{\sqrt{p^2 - q}}$.

Die Gleichungen der geraden Linien, welche den Winkel φ und $180 - \varphi$ im Verhältniss $a' : b'$ theilen, sind daher

$$x = y \cotg \left(\psi + \frac{a' \varphi}{a' + b'} \right), \quad x = y \cotg \left(\psi + \frac{180 a'}{b' + b'} + \frac{a' \varphi}{a' + b'} \right),$$

und die Gleichung, welche beide gerade Linien darstellt, ist also

$$\begin{aligned} x^2 - xy \left\{ \cotg \left(\psi + \frac{a' \varphi}{a' + b'} \right) + \cotg \left(\psi + \frac{180 a'}{a' + b'} + \frac{a' \varphi}{a' + b'} \right) \right\} \\ + y^2 \cotg \left(\psi + \frac{a' \varphi}{a' + b'} \right) \cotg \left(\psi + \frac{180 a'}{a' + b'} + \frac{a' \varphi}{a' + b'} \right) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man $a' = b'$, so erhält man die Gleichung der Halbierungslinien der Winkel, welche die beiden geraden Linien $ax^2 + bx + cy^2 = 0$ einschliessen; diese Gleichung ist

$$x^2 - 2 \frac{a - c}{b} xy - y^2 = 0.$$

Man sieht, dass ein Paar von imaginären geraden Linien ($b^2 - 4ac$ negativ) immer reelle Winkelhalbierungslinien hat.

301. Nimmt man statt homogenen Koordinaten die Koordinaten Descartes, so ist die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Soll diese Gleichung in zwei lineare Faktoren zerfallen, so muss sein

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta = 0.$$

Wenn umgekehrt diese Relation besteht, so stellt die Gleichung ein Linienpaar dar. Berechnet man die Grössen x_1, y_1 aus den beiden Gleichungen

$a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} = 0, a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} = 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$, zu welchen noch wegen $\Delta = 0$ die Gleichung $a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33} = 0$ tritt, so stellt die Gleichung

$$a_{11}(x - x_1)^2 + 2a_{12}(x - x_1)(y - y_1) + a_{22}(y - y_1)^2 = 0$$

das Linienpaar dar. Aus dieser Gleichung folgt

$$(x - x_1) = (y - y_1) \left\{ \frac{-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \right\},$$

$$(x - x_1) = (y - y_1) \left\{ \frac{-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \right\}.$$

Ist $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, so stellt die Gleichung zwei imaginäre gerade Linien oder den Punkt x_1, y_1 dar.

Ist $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, so wird die gegebene Gleichung zu

$$\left\{ (a_{12}x + a_{22}y) \frac{a_{12}}{a_{23}} + \frac{a_{11}a_{23}}{a_{12}} \right\}^2 = \frac{a_{32}^2 - a_{22}a_{33}}{a_{22}}.$$

Diese Gleichung stellt zwei parallele gerade Linien dar. Ist aber $a_{32}^2 - a_{33}a_{22} = 0$, so stellt die Gleichung eine doppelte gerade Linie dar; in diesem Falle ist auch $a_{13}^2 - a_{11}a_{32} = 0$.

Die gegebene Gleichung bedeutet also:

1) einen Punkt, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \Delta = 0$;

2) eine doppelte gerade Linie, wenn

a) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \Delta = 0, a_{22} \geq 0, a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0$,

b) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \Delta = 0, a_{11} \leq 0, a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0$;

3) zwei parallele gerade Linien, wenn

a) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \Delta = 0, a_{11} \geq 0, a_{11}a_{33} - a_{13}^2 < 0,$

b) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \Delta = 0, a_{22} \geq 0, a_{22}a_{33} - a_{23}^2 < 0;$

4) zwei sich schneidende reelle gerade Linien, wenn

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0, \Delta = 0.$$

302. Die Gleichung stellt die beiden geraden Linien $y - x - 1 = 0, y - 4x + 2 = 0$ dar.

303. Die Gleichung stellt das Linienpaar $(x - a)^2(b^2 - c^2) - 2ab(x - a)(y - b) + (y - b)^2(a^2 - c^2) = 0$ dar.

304. $a_{11} = -5\frac{20}{69}.$ **305.** $a'_{12} = \frac{7}{2}, a''_{12} = -\frac{23}{22}.$

306. $a'_{13} = a''_{13} = -\frac{7}{2}.$

307. Die Anzahl der nötigen Bedingungen ist

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \binom{n}{2};$$

ist $n = 2$, so ist die Bedingung $\Delta = 0$.

Der Kreis.

308, 309. Die Gleichung des gesuchten Ortes ist $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ und umgekehrt stellt diese Gleichung immer einen Kreis dar.

Ist O der Pol, OM die Axe der Polarkoordinaten, C des Kreises Mittelpunkt, $OC = d$, $\angle COM = \alpha$, so ist die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten

$$\varrho^2 - 2d\varrho \cos(\vartheta - \alpha) + d^2 - r^2 = 0.$$

Fällt OM in OC , so ist $\alpha = 0$. Liegt der Pol in der Peripherie, so ist $\varrho = 2r \cos \vartheta$.

310. Unter Voraussetzung schiefwinkliger Axen muss sein $a_{11} = a_{22}$ und bei rechtwinkligen Axen noch $a_{12} = 0$. Die Koordinaten des Kreismittelpunktes sind $\alpha = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \beta = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$ und der Radius $r = \frac{1}{a_{11}} \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}a_{11}}.$

311. 1) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$; die Axe der x schneidet den Kreis in den Punkten $(3, 0)$, $(3, 0)$ und die Axe der y in den Punkten $(0, 4 + \sqrt{7})$, $(0, 4 - \sqrt{7})$.

2) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$; die Axe der x schneidet den Kreis in den Punkten $(4 + \sqrt{7}, 0)$, $(4 - \sqrt{7}, 0)$, die Axe der y schneidet den Kreis in den Punkten $(0, 3)$, $(0, 3)$.

3) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{43}{2}$; die Axe der x schneidet den Kreis in den Punkten $\left(\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{61}{4}}, 0\right)$, $\left(\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{61}{4}}, 0\right)$, die Axe der y schneidet den Kreis in den Punkten $\left(0, \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{37}{4}}\right)$, $\left(0, \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{4}}\right)$. Die Kreise 1 und 2 schneiden sich in den Punkten $x = y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$, $x = y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$; die Kreise 1 und 3 schneiden sich in den Punkten

$$x = \frac{27}{10} + \frac{3}{10}\sqrt{151}, y = \frac{49}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{151};$$

$$x = \frac{27}{10} - \frac{3}{10}\sqrt{151}, y = \frac{49}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{151}.$$

Die Kreise 2 und 3 schneiden sich in keinen reellen Punkten, da die Koordinaten der Punkte sind $x = \frac{13}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{107}$, $y = \frac{11}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{107}$; $x = \frac{13}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{107}$, $y = \frac{11}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{107}$; $i = \sqrt{-1}$.

312. Zwei Kreise

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ sind konzentrisch, wenn $A = A_1$, $B = B_1$.

313. Die gerade Linie schneidet den Kreis in zwei Punkten.

314. 1) $x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}$, die gerade Linie ist Tangente in diesem Punkte.

2) $x = 1$; $y = 3$; $x = \frac{71}{37}$, $y = -\frac{93}{37}$.

3) $x = 5$, $y = 3$; $x = \frac{141}{53}$, $y = -\frac{275}{53}$.

4) Die gerade Linie ist Tangente im Punkte $x = 15$, $y = 15$.

5) Die gerade Linie ist Tangente im Punkte $x = 5, y = 5$.

$$6) x = \frac{14}{\sqrt{5}}, y = \frac{7}{\sqrt{5}}; x = -\frac{14}{\sqrt{5}}, y = -\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

315. Wenn die Gleichung des gegebenen Kreises

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

ist, so ist die Gleichung der Tangente im Punkte x', y' :

$$xx' + yy' + ax + by + ax' + by' + c = 0.$$

Ist die Gleichung des Kreises $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, so ist die Gleichung der Tangente im Punkte x', y'

$$(x - a)(x' - a) + (y - b)(y' - b) = r^2,$$

welche für $a = b = 0$ zu $xx' + yy' = r^2$ wird.

316. Siehe Lösung 319.

317—318. Liegt der Punkt x, y nicht auf dem Kreise $A = 0$, so ist das Quadrat der gesuchten Länge der Tangente

$$A = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2.$$

319, 320. Liegt in Aufg. 315 der Punkt x'', y'' nicht auf dem Kreise, so stellen die Gleichungen $x''x' + y''y' = r^2$, $x'^2 + y'^2 = 0$ die Koordinaten des Berührungspunktes x', y' der Tangente durch x'', y'' dar; man kann also von jedem Punkte zwei Tangenten an den Kreis ziehen. Die Gleichung $xx'' + yy'' = r^2$ stellt also die Verbindungslinie der Berührungspunkte dar. Die Gleichung des Tangentenpaares durch x'', y'' ist

$$(x''^2 + y''^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = (xx'' + yy'' - r^2)^2.$$

321. Die Tangente im Punkte x', y' hat die Gleichung $xx' + yy' = r^2$ und der Radius nach dem Punkte x', y' hat die Gleichung $xy' - yx' = 0$, beide Linien bilden also einen rechten Winkel.

$$\mathbf{322.} \quad 4x + 3y = 35. \quad \mathbf{323.} \quad x + 3y = 19.$$

$$\mathbf{324.} \quad y - y' = -\frac{x' + x''}{y' + y''}(x - x')$$

oder

$$y(y' + y'') + x(x' + x'') = r^2 + y'y'' + x'x''.$$

$$\mathbf{325.} \quad \frac{A\alpha + B\beta + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r.$$

326—332. Der Kreis habe die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$; der gegebene Punkt P habe die Koordinaten x', y' , und eine gerade Linie durch P schneide den Kreis in den Punkten

$M: (x_1, y_1)$, $N: (x_2, y_2)$ und der Punkt Q sei der durch M und N von P getrennte vierte harmonische Punkt. Hat Q die Koordinaten x, y , so ist nach 324

$$x(x_1 + x_2) + y(y_1 + y_2) = r^2 + x_1x_2 + y_1y_2$$

und

$$x'(x_1 + x_2) + y'(y_1 + y_2) = r^2 + x_1x_2 + y_1y_2,$$

also

$$(x + x')(x_1 + x_2) + (y + y')(y_1 + y_2) = 2r^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2.$$

Da die Punkte P, N, Q, M harmonisch liegen, so ist nach Aufg. 176–180:

$$\frac{PN}{MP} : \frac{QN}{MQ} = \frac{NP}{PM} : \frac{NQ}{QM} = -1$$

oder

$$\frac{x_2 - x'}{x' - x_1} : \frac{x_2 - x}{x - x_1} = -1, \quad \frac{y_2 - y'}{y' - y_1} : \frac{y_2 - y}{y - y_1} = -1,$$

also

$$\begin{aligned} (x + x')(x_1 + x_2) - 2xx' &= 2x_1x_2, \\ (y + y')(y_1 + y_2) - 2yy' &= 2y_1y_2. \end{aligned}$$

Addiert man die beiden letzten Gleichungen, beachtet obige Gleichung, so ist die Gleichung des gesuchten Ortes von $Q: xx' + yy' = r^2$. Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis ist eine gerade Linie, welche auf der geraden Linie $y'x - yx' = 0$, d. h. auf der geraden Linie, die den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, senkrecht steht. Die Polare des Mittelpunktes des Kreises ist die unendlich ferne gerade Linie. Aus der Gleichung der Polaren folgt leicht Aufg. 329, 330. Liegt der Pol auf dem Kreise, so ist die Polare Tangente in dem Pol. Nach Aufg. 319, 320 folgt, dass die Polare eines ausserhalb des Kreises liegenden Punktes P die Verbindungslinie der Berührungspunkte der von P ausgehenden Tangenten ist. Um die Polare zu konstruieren, ziehe man vom gegebenen Punkte P zwei gerade Linien, welche den Kreis in den Punkten a, b, c, d schneiden, ziehe die Linie ab, bc , welche sich in e treffen, und die Linien ac, bd , welche den Punkt f gemeinsam haben, es ist dann ef die Polare von P .

333, 334. Die Polaren der Punkte a) (1, 3); b) (4, 4); c) (3, 5); d) (7, 11); e) (15, 19); f) (7, 2) in Bezug auf die Kreise 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Aufg. 333 sind:

- 1) a) $x = \frac{5}{2}$; b) $x - y + 8 = 0$; c) $-x + y = 3$;
 d) $x + 4y = 22$; e) $5x + 8y = 54$; f) $2x - y = 17$.
- 2) a) $y + x = 3$; b) $x - y = 8$; c) unendlich ferne Gerade;
 d) $2x + 3y = 26$; e) $6x + 7y = 58$; f) $4x - 3y = 7$.
- 3) a) $y = 15$; b) $3x + 2y = 20$; c) $2x + 3y = 21$;
 d) $6x + 9y = 37$; e) $14x + 17y = 61$; f) $6x = 19$.
- 4) $ax + by = 7$, $(a, b) = (1, 3), (4, 4), (3, 5), (7, 11), (15, 19), (7, 2)$.
- 5) a) $3y - 2x = 29$; b) $4x + 5y = 44$; c) $2x + 7y = 43$;
 d) $10x + 19y = 77$; e) $26x + 35y = 133$; f) $10x + y = 50$.
- 6) a) $x + 5y = 12$; b) $7x + 7y = 16$; c) $5x + 9y = 16$;
 d) $13x + 21y = 26$; e) $29x + 37y = 42$; f) $13x + 3y = 17$.

Die Berührungspunkte der Tangenten von den Punkten a, b, c, d, e, f an die resp. Kreise haben die Koordinaten:

1) a) $x = \frac{5}{2}, y = 3 + \frac{5}{\sqrt{2}}; x = \frac{5}{2}, y = 3 - \frac{5}{\sqrt{2}};$

b) die Koordinaten sind imaginär;

c) die Koordinaten sind imaginär;

d) $x = \frac{90 - 4\sqrt{145}}{17}, y = \frac{71 + \sqrt{145}}{17};$

$x = \frac{90 + 4\sqrt{145}}{17}, y = \frac{71 - \sqrt{145}}{17};$

e) $5x + 8y = 54, y = \frac{307 \pm \sqrt{21625}}{89};$

f) der Punkt liegt im Innern des Kreises.

2) a, b, c liegen im Innern des Kreises;

d) $x = \frac{49 - 3\sqrt{105}}{13}, y = \frac{80 + 2\sqrt{105}}{13};$

$x = \frac{49 + 3\sqrt{105}}{13}, y = \frac{80 - 2\sqrt{105}}{13};$

e) $x = \frac{57 + 7\sqrt{33}}{17}, y = \frac{92 - 6\sqrt{33}}{17};$

$x = \frac{57 - 7\sqrt{33}}{17}, y = \frac{92 + 6\sqrt{33}}{17};$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad x &= \frac{23 + 3\sqrt{6}}{5}, \quad y = \frac{19 + 4\sqrt{6}}{5}; \\ x &= \frac{23 - 3\sqrt{6}}{5}, \quad y = \frac{19 - 4\sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

3) a) Die Koordinaten sind imaginär;

b, c) die Punkte liegen auf dem Kreise, also sind die Polaren die Tangenten;

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad x &= \frac{5}{3} - 2\sqrt{2}, \quad y = 3 + \frac{4}{3}\sqrt{2}; \\ x &= \frac{5}{3} + 2\sqrt{2}, \quad y = 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}; \end{aligned}$$

$$\text{e)} \quad x = \frac{667}{485} \mp \frac{34}{485}\sqrt{1534}, \quad y = \frac{1191}{485} \pm \frac{28}{485}\sqrt{1534};$$

$$\text{f)} \quad 6x = 19, \quad y = 2 \pm \frac{1}{6}\sqrt{13 \cdot 23}.$$

$$\begin{aligned} 4) \quad x &= \frac{7a}{(a^2 + b^2)} \mp \frac{b}{(a^2 + b^2)}\sqrt{7(a^2 + b^2 - 7)}, \\ y &= \frac{7b}{a^2 + b^2} \pm \frac{a}{a^2 + b^2}\sqrt{7(a^2 + b^2 - 7)}, \end{aligned}$$

$$(a, b) = (1, 3), (4, 4), (3, 5), (7, 11), (15, 19), (7, 2).$$

$$\begin{aligned} 5) \quad x &= \frac{57a}{4(a^2 + b^2)} \mp \frac{b}{a^2 + b^2}\sqrt{\frac{57}{4}\left(a^2 + b^2 - \frac{57}{4}\right)}, \\ y &= \frac{57b}{4(a^2 + b^2)} \pm \frac{a}{a^2 + b^2}\sqrt{\frac{57}{4}\left(a^2 + b^2 - \frac{57}{4}\right)}, \end{aligned}$$

$$(a, b) = \left(-1, \frac{3}{2}\right), \left(2, \frac{5}{2}\right), \left(1, \frac{7}{2}\right), \left(5, \frac{19}{2}\right), \left(13, \frac{35}{2}\right), \left(5, \frac{1}{2}\right);$$

die Punkte (1, 3), (4, 4), (3, 5) liegen im Innern des Kreises.

$$\begin{aligned} 6) \quad x &= \frac{9a}{2(a^2 + b^2)} \mp \frac{b}{a^2 + b^2}\sqrt{\frac{9}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{9}{2}\right)}, \\ y &= \frac{9b}{2(a^2 + b^2)} \pm \frac{a}{a^2 + b^2}\sqrt{\frac{9}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{9}{2}\right)}, \end{aligned}$$

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{13}{2}, \frac{21}{2}\right), \left(\frac{29}{2}, \frac{37}{2}\right), \left(\frac{13}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

335, 336, 337. Der Pol der geraden Linie

$$Ax + By + C = 0$$

in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ ist bestimmt durch die Koordinaten $-\frac{a^2 A}{C}$, $-\frac{a^2 B}{C}$.

Die in Aufg. 335, 336 gegebenen geraden Linien haben in Bezug auf die Kreise 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Aufg. 335 die Pole:

- | | | |
|---|--------------------------------------|--|
| 1) a) $\frac{1}{3}, \frac{9}{2};$ | b) $0, \frac{43}{9};$ | c) $-\frac{1}{3}, \frac{14}{3};$ |
| d) $\frac{1}{2}, \frac{11}{2};$ | e) $\frac{15}{16}, \frac{9}{2};$ | f) $\frac{121}{107}, \frac{485}{107}.$ |
| 2) a) $14\frac{2}{7}, 10\frac{5}{7};$ | b) $225, 50;$ | c) $33\frac{1}{3}, 8\frac{1}{3};$ |
| d) $-3\frac{1}{8}, +3\frac{1}{8};$ | e) $2\frac{7}{9}, 22\frac{2}{9};$ | f) $-15\frac{10}{11}, 56\frac{9}{11}.$ |
| 3) a) $-4\frac{8}{11}, -3\frac{6}{11};$ | b) $-2\frac{13}{80}, \frac{23}{40};$ | c) $-3\frac{9}{13}, \frac{1}{13};$ |
| d) $\frac{31}{34}, 2\frac{10}{17};$ | e) $\frac{3}{20}, -13\frac{3}{10};$ | f) $7\frac{9}{50}, -17.$ |
| 4) a) $\frac{1}{7}, \frac{6}{7};$ | b) $\frac{3}{16}, \frac{19}{8};$ | c) $-\frac{1}{3}, 2\frac{1}{6};$ |
| d) $1\frac{3}{4}, 4\frac{1}{4};$ | e) $2\frac{4}{9}, -2\frac{5}{9};$ | f) $4\frac{27}{43}, -2\frac{35}{43}.$ |
| 5) a) $-\frac{1}{3}, -1\frac{3}{4};$ | b) $\frac{8}{5}, -\frac{11}{5};$ | c) $\frac{6}{7}, -2\frac{2}{7};$ |
| d) $-3\frac{1}{9}, -1\frac{8}{9};$ | e) $-1\frac{5}{7}, -\frac{5}{7};$ | f) $-2\frac{35}{36}, \frac{17}{36}.$ |
| 6) a) $3\frac{2}{3}, 1\frac{1}{4};$ | b) $10\frac{6}{25}, -\frac{7}{25};$ | c) $7\frac{5}{7}, -\frac{4}{7};$ |
| d) $-5\frac{7}{9}, \frac{7}{9};$ | e) $-1\frac{3}{35}, 4\frac{27}{35};$ | f) $-5\frac{11}{36}, 8\frac{29}{36}.$ |

338. Ist die Gleichung eines Kreises

$$x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

geht dieser Kreis durch die Punkte $x', y'; x'', y''; x''', y'''$, so bestehen die Gleichungen

$$x'^2 + y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33} = 0,$$

$$x''^2 + y''^2 + 2a_{13}x'' + 2a_{23}y'' + a_{33} = 0,$$

$$x'''^2 + y'''^2 + 2a_{13}x''' + 2a_{23}y''' + a_{33} = 0.$$

Hieraus folgt die Gleichung des Kreises, welcher durch die drei Punkte geht:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x'^2 + y'^2 & x' & y' & 1 \\ x''^2 + y''^2 & x'' & y'' & 1 \\ x'''^2 + y'''^2 & x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = f(x, y) = 0.$$

339. Liegt auf dem Kreise der Aufg. 338 noch der Punkt x''', y''' , so muss die Gleichung $f(x''', y''') = 0$ bestehen. Sind $M N P Q$ vier feste Punkte eines Kreises und R ein beliebiger Punkt, so folgt aus der Determinante

$$(RM)^2 \cdot (NPQ) + (RP)^2 \cdot (MNQ) = (RN)^2 \cdot (MPQ) + (RQ)^2 \cdot (MNP),$$

wenn (NPQ) den Inhalt des Dreiecks NPQ bezeichnet.

Fällt R mit dem Schnittpunkte der beiden geraden Linien MP, QN zusammen, so folgt aus der letzten Gleichung die bekannte Relation $RP \cdot RM = RN \cdot RQ$.

Wenn R auf einen der Punkte $MNPQ$ fällt, so erhält man aus obiger Gleichung die Relation des Ptolemäus

$$NM \cdot PQ \pm NP \cdot MQ \pm NQ \cdot MP = 0.$$

340. 1) Die drei Punkte liegen in der geraden Linie

$$y - x = 1;$$

$$2) \left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}; \quad 3) x^2 + y^2 - 3x - y = 0;$$

$$4) \text{ die Punkte liegen in der geraden Linie } x - y + 1 = 0;$$

$$5) \quad x^2 + y^2 - 15x - 19y + 74 = 0;$$

$$6) \quad x^2 + y^2 - 10x - 9y + 29 = 0.$$

341, 342. Die Gleichung des Kreises in Aufg. 341 folgt leicht aus Aufg. 113 und ist die Gleichung in Aufg. 342; umgekehrt stellt die Gleichung der Aufg. 342 den Kreis in Aufg. 341 dar.

343. Es muss sein

$$DE - 2BF = 0, \quad D^2 - 4AF = E^2 - 4CF;$$

die Koordinaten a, b des Mittelpunktes sind:

$$a = \frac{D}{2F}, \quad b = \frac{E}{2F},$$

und der Radius ist gegeben durch

$$r^2 = \frac{D^2 - 4AF}{4F^2} = \frac{E^2 - 4CF}{4F^2}.$$

344. Es stellt A die Differenz des Quadrates des Radius und des Quadrates des senkrechten Abstandes einer durch die Koordinaten u, v gegebenen geraden Linie dar.

345, 346, 347. Die Koordinaten der Tangenten sind

$$u = u_0 - lu_1, \quad v = v_0 - lv_1, \quad w = 1 - l,$$

wenn l der Gleichung:

$$Al^2 - 2Bl + C = 0$$

genügt und wenn man setzt

$$A = (au_1 + bv_1 + 1)^2 - r^2(u_1^2 + v_1^2),$$

$$B = (au_0 + bv_0 + 1)(au_1 + bv_1 + 1) - r^2(u_0u_1 + v_0v_1),$$

$$C = (au_0 + bv_0 + 1)^2 - r^2(u_0^2 + v_0^2).$$

Die Gleichung des Poles der durch die Koordinaten u_1, v_1 gegebenen geraden Linie ist

$$(au + bv + 1)(au_1 + bv_1 + 1) - r^2(uu_1 + vv_1) = 0.$$

Setzt man hier $u = u_0, v = v_0$, dann wird in Aufg. 345 $B = 0$ und der Beweis der Aufg. 346 ist einfach; die vier Linien haben die Koordinaten

$$u_0, v_0; \quad u_1, v_1; \quad u_0 + lu_1, v_0 + lv_1; \quad u_0 - lu_1, v_0 - lv_1.$$

348. Ist ein Punkt P ausserhalb eines Kreises gegeben, so konstruiert man nach Aufg. 332 die Polare des Punktes also: Man zieht von dem Punkte zwei gerade Linien, welche den Kreis in den Punkten 1, 2; 6, 3 treffen, man verbindet 1 und 3, 2 und 6 durch gerade Linien, welche sich in M schneiden und man zieht die geraden Linien 1 6, 2 3, deren Schnittpunkt S ist; die gerade Linie MS ist die Polare von P . Zieht man durch P noch eine dritte gerade Linie, welche den Kreis in 5 und 4 trifft, verbindet 6 und 4, 3 und 5 durch gerade Linien, so liegt deren Schnittpunkt N auf der Polaren von P . Man kann also MN konstruieren, indem man die geraden Linien $P 1 2, P 6 3, P 5 4$ zieht, die Punkte 1 und 3, 6 und 2, 5 und 3, 6 und 4 verbindet und die gerade Linie durch MN zieht. Das Sechseck ist nach der Konstruktion ein Pascalsches Sechseck. Sind jetzt auf dem Kreise fünf Punkte gegeben 1 2 3 5 6. Mit der gebrauchten Bezeichnung kann man den Pol P von MS bestimmen. Zieht man 5 3, welche MS in N trifft und ist R der Schnittpunkt von 6 5

und MS , so schneiden sich die geraden Linien $3R$ und $6N$ in einem Punkte 4 des Kreises. Lässt man den Punkt 5 den Kreis beschreiben, so bleibt N auf der geraden Linie MS und 4 bewegt sich nach der Konstruktion auch auf dem Kreise. Alle Sechsecke $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$ sind Pascalsche Sechsecke. Betrachtet man 3 und 6 als die Träger zweier Strahlenbüschel und $3\ 4$, $6\ 4$ als entsprechende Strahlen, so sind diese Büschel projektivisch. Die Gerade MN schneide den Kreis in T, T' so sind PT, PT' Tangenten des Kreises. Die vier Punkte R, T, N, T' liegen harmonisch; es ist also das Strahlenbüschel $P(RTNT')$ ein harmonisches Büschel. Sind die Gleichungen der geraden Linien PT, PT', PN resp. $V=0$, $V_1=0$, $V_0+lV_1=0$, so hat die gerade Linie PR die Gleichung $V_0-lV_1=0$. Wenn also das Strahlenbüschel PN die Gleichung $V_0+lV_1=0$, so hat das Strahlenbüschel PR die Gleichung $V_0-lV_1=0$. Ein beliebiger Punkt des Kreises 5_n bestimmt N_n, R_n . Die Gleichungen der Linien PN_n, PR_n sind $V_0+l_nV_1=0$, $V_0-l_nV_1=0$. Bildet man nach Aufg. 181 die Doppelverhältnisse $P(R_0, R_1, R_2, R_3) P(N_0, N_1, N_2, N_3)$ oder $6(5_0, 5_1, 5_2, 5_3), 3(5_0, 5_1, 5_2, 5_3)$, so findet man leicht $6(5_0, 5_1, 5_2, 5_3) = 3(5_0, 5_1, 5_2, 5_3)$. Die Punkte 5 sind ganz beliebige Punkte des Kreises.

Es sei $abcdef$ das dem Kreise eingeschriebene Sechseck. Es ist $a(bcdf) = e(bcdf)$. Den durch b, c, d, f gezogenen Strahlen B, C, D, F des einen entsprechen beziehungsweise die Strahlen B', C', D', F' des andern Büschels. Die Strahlen des ersten Büschels bestimmen auf der geraden Linie cd die ihm projektivischen Punkte $(b'c'd'f')$ und jene des zweiten Büschels auf bc die ihm projektivischen Punkte $(b''c'd''f'')$; da die Büschel projektivisch sind, so sind auch diese Punktreihen projektivisch und b' und b'' , c' und c'' , d' und d'' , f' und f'' je zwei entsprechende Punkte derselben. Zieht man $b'b'', d'd''$, welche sich in m schneiden, so geht die gerade Linie mf' durch f'' ; denn da c mit c', c'' zusammenfällt, so ist

$$m(b', c, d', f') = (b'cd'f') = (b''cd''f'').$$

Gesetzt, mf' gehe nicht durch f'' , sondern schneide die gerade Linie $b''c$ in f''' , so muss sein $(b'cd'f') = m(b'', cd''f''')$

$= (b'' c d'' f'')$, was nur möglich ist, wenn f''' mit f'' zusammenfällt. Der Durchschnittspunkt m der Seiten ab und dc fällt demnach in die gerade Linie, welche durch den Schnittpunkt der Seiten bc und ef und den Schnittpunkt der Seiten cd und fa bestimmt wird. Das Sechseck $abcdef$ ist mithin ein Pascalsches Sechseck. Dieselbe Ableitung gilt für die Kegelschnitte.

349. Das Sechseck $abcdef$ sei dem Kreise umschrieben; g, h, i, k, l, m seien die Berührungspunkte seiner Seiten. Den Eckpunkten a, b, c, d, e, f entsprechen resp. als Polaren die Seiten mg, gh, hi, ik, kl, lm und den Diagonalen be, cf, ad als Pole die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten des eingeschriebenen Sechsecks. Nach Aufg. 348 liegen aber die Punkte n, o, p in einer geraden Linie, also müssen deren Polaren durch den Pol q dieser Geraden gehen. Das umschriebene Sechseck ist also ein Brianchonsches Sechseck.

350. Die Gleichungen der drei geraden Linien AA', BB', CC' sind:

$$\begin{aligned} AA' : (x' x''' + y' y''' - r^2) (x x'' + y y'' - r^2) &= (x' x'' + y' y'' - r^2) (x x''' + y y''' - r^2), \\ BB' : (x' x'' + y' y'' - r^2) (x x''' + y y''' - r^2) &= (x'' x''' + y'' y''' - r^2) (x x' + y y' - r^2), \\ CC' : (x'' x''' + y'' y''' - r^2) (x x' + y y' - r^2) &= (x' x''' + y' y''' - r^2) (x x'' + y y'' - r^2). \end{aligned}$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man identisch Null, die Linien schneiden sich in einem Punkte.

351. Man ziehe zu jedem der drei gegebenen Punkte A, B, C die Polare, verbinde den Durchschnittspunkt je zweier dieser Polaren mit dem Pole der dritten (α mit A , β mit B , γ mit C), ziehe endlich durch je zwei der drei Punkte m, n, o , worin die Verbindungslinien $\alpha A, \beta B, \gamma C$ resp. von den Polaren $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ geschnitten werden, die geraden Linien no, om, mn . Diese treffen den Kreis in den Ecken $A', A''; B', B''; C', C''$ der gesuchten Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$.

352. Die gegebenen Punkte seien ABC , das gesuchte Dreieck habe auf BC die Ecke A' , auf AB die Ecke C' und auf AC die Ecke B' ; $A'B'$ berühre den Kreis in c , $A'C'$ berühre den Kreis in b und $B'C'$ berühre den Kreis in a . Es sind A', B', C' die Pole der Seiten des Dreiecks abc . Die Seiten des Dreiecks ABC müssen daher ihre Pole in den Seiten des Dreiecks abc haben. Diese Pole sind aber, da die

Polaren AB , BC , CA bekannt sind, selbst gegeben. Hat man die Pole bestimmt, so muss man ein dem Kreise eingeschriebenes Dreieck konstruieren, dessen Seiten durch diese Pole gehen; die Aufgabe ist also auf die Aufg. 351 zurückgeführt.

353. Die Gleichung der Polaren von M ist $ax' + yy' - r^2 = 0$ und die Länge NQ ist $\frac{x'x'' + y'y'' = r^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$. Es ist $OM^2 = x'^2 + y'^2$, also $OM \cdot NQ = x'x'' + y'y'' - r^2$; ebenso ist $ON \cdot MP = x'x'' + y'y'' - r^2$, also $OM : MP = ON : NQ$.

354. Die gerade Linie ist im Punkte $r \cos \vartheta$, $r \sin \vartheta$ Tangente des Kreises.

355. Die Gleichung des Kreises sei $x^2 + y^2 = r^2$ und die Gleichungen der Tangenten seien $x \cos \vartheta_1 + y \sin \vartheta_1 = r$, $x \cos \vartheta_2 + y \sin \vartheta_2 = r$, dann hat der Schnittpunkt die Koordinaten

$$x = r \frac{\cos \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\cos \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \quad y = r \frac{\sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2)}.$$

356. Geht in der Aufg. 355 durch die Berührungspunkte $x' = r \cos \vartheta_1$, $y' = r \sin \vartheta_1$, $x'' = r \cos \vartheta_2$, $y'' = r \sin \vartheta_2$ eine Sehne, so ist deren Länge gleich der Quadratwurzel aus $(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = \{2 - 2 \cos (\vartheta_1 - \vartheta_2)\} r^2$. Da die Sehne von konstanter Länge ist, so ist $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \cos A = 2\alpha$ und die Länge der Sehne gleich $2r \sin \alpha$. Die Koordinaten der Aufg. 355 genügen der Gleichung $(x^2 + y^2) \cos^2 \alpha = r^2$; der gesuchte Ort ist ein Kreis.

357. Die Gleichung der Sehne ist

$$x \cos \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + y \sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = r \cos \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

Nach Aufg. 356 ist aber $\vartheta_1 - \vartheta_2$ konstant und $\vartheta_1 + \vartheta_2$ unbestimmt; die Sehne berührt also den Kreis $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \alpha$.

358. Der gesuchte Ort ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2 - ab$, wenn $a + b$ die Länge der Sehne ist.

359. Mit Ausnahme der Gleichung 1 der Aufg. 156 stellen die Gleichungen Kreise dar.

Ist die Grundlinie und der Winkel an der Spitze gegeben, so nimmt man die Basis und die rechtwinklige Halbierungslinie zu Axen, bezeichnet die Hälfte der Basis mit c und den Winkel an der Spitze mit α . Der Ort der Spitze ist der Kreis $c^2 = y^2 + x^2 - 2cy \cotg \alpha$. Der Ort des Höhenschnittpunktes ist der Kreis $c^2 = y^2 + x^2 + 2cy \cotg \alpha$. Hat die Spitze des Dreiecks die Koordinaten x, y , so hat der Schnittpunkt der Mittellinien für das zu Grund gelegte Koordinatensystem die Koordinaten $\frac{x}{3}, \frac{y}{3}$; dieser Punkt beschreibt also den Kreis

$$c^2 = 9y^2 + 9x^2 - 6cy \cotg \alpha.$$

360. Die Entfernung eines Punktes x, y von dem Punkte x^n, y^n ist die Quadratwurzel aus

$$(x - x^n)^2 + (y - y^n)^2 = x^2 + y^2 - 2xx^n - 2yy^n + x^{n2} + y^{n2};$$

es ist also die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$(x^2 + y^2) (n' + n'' + n''' + \dots) - 2x (n'x' + n''x'' + \dots) - 2y (n'y' + n''y'' + n'''y''' + \dots) = c.$$

Der Ort ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$\frac{n' + n'' + n''' + \dots}{n'x' + n''x'' + \dots}, \frac{n'y' + n''y'' + n'''y''' + \dots}{n' + n'' + n''' + \dots}$$

hat.

361. Ist die Gleichung der geraden Linie

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0,$$

so ist

$$(n'x' + n''y'' + n'''x''' + \dots) \cos \alpha + (n'y' + n''y'' + n'''y''' + \dots) - \delta (n' + n'' + n''' + \dots) = \text{konst.},$$

also ist

$$\{x (n' + n'' + n''' \dots) - (n'x' + n''x'' \dots)\} \cos \alpha + \{y (n' + n'' + n''' \dots) - (n'y' + n''y'' + \dots)\} = \text{konst.}$$

Diese gerade Linie umhüllt den Kreis

$$\left\{x - \frac{n'x' + n''x'' + \dots}{n' + n'' + n'''}\right\}^2 + \left\{y - \frac{n'y' + n''y'' + \dots}{n' + n'' + n'''}\right\}^2 = \text{konst.}$$

362. Sind zwei der Seiten des Dreiecks die Koordinatenachsen, so ist die Gleichung des Ortes

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos C - ax + by + m^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, welcher mit dem diesem Dreieck umschriebenen Kreis konzentrisch ist.

363. Hat der Punkt A die Koordinaten x', y' , so ist die Gleichung des Ortes

$$y^2 + x^2 - y(y' + x') + x(y' - x') = 0.$$

Dies ist ein Kreis, welcher durch x', y' geht.

364. Der gesuchte Ort ist der um das Dreieck beschriebene Kreis.

365. Ist die Gleichung irgend einer der parallelen Sehnen $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$, so ist die Gleichung des Ortes $y \cos \alpha - x \sin \alpha = 0$; der Ort ist also der auf den Sehnen senkrechte Durchmesser.

366. Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sei der Koordinatenursprung, die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes O und des festen Punktes C sei die Axe der x ; der feste Punkt habe die Koordinaten $r_1, 0$ und der Kreis die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$; die Gleichung des gesuchten Ortes ist $x^2 + y^2 = r_1 x$, d. h. ein Kreis mit dem Durchmesser CO .

367, 368. Die gerade Linie schneide den Kreis in den Punkten $A(x'', y'')$, $B(x''', y''')$ und ist die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, so ist $x'' + x''' = 2p \cos \alpha$, $x'' x''' = p^2 - r^2 \sin^2 \alpha$, $y'' + y''' = 2p \sin \alpha$, $y'' y''' = p^2 - r^2 \cos^2 \alpha$. Verbindet man den Punkt $C(x', y')$ mit A und B , so sind die Gleichungen der Seiten AC, BC

$$y' - y'' = m(x' - x''), \quad (1 + m \operatorname{tg} \beta)(y' - y'') = (m - \operatorname{tg} \beta)(x' - x'''),$$

$$\text{mithin} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y'(x'' - x''') + y'' x''' - x'' y'''}{(y' - y'')(y' - y''') + (x' - x'')(x' - x''')}.$$

Da die Koordinaten $x'', y''; x''', y'''$ und β bekannt sind, so muss x', y' dieser Gleichung genügen. Ist $\beta = 90^\circ$, so ist

$$\text{oder} \quad (y' - y'')(y' - y''') + (x' - x'')(x' - x''') = 0,$$

$$x'^2 + y'^2 - 2px' \cos \alpha - 2py' \sin \alpha + 2p^2 - r^2 = 0.$$

369. Wenn x, y die Koordinaten des Sehnenmittelpunktes sind, so ist in Aufg. 368 $x = \frac{x'' + x'''}{2}$, $y = \frac{y'' + y'''}{2}$, also die Gleichung des gesuchten Ortes

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + x^2 + y^2 = r^2.$$

370. Verschiebt man die Koordinatenachsen parallel, so dass der Kreismittelpunkt die Koordinaten a_{13} , a_{23} hat, so findet man nach Aufg. 368 die gesuchte Bedingung

$$2p^2 + 2p(a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha) + a_{33} = 0.$$

371. Nimmt man in Aufg. 370 die Grössen p und α als Polarkoordinaten eines Punktes, so beschreibt dieser Punkt den gesuchten Ort

$$2(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

372. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r , welcher die gerade Linie L berührt, besteht aus den beiden mit L in der Entfernung r von L gezogenen geraden Linien.

Die Gleichungen der beiden Kreise seien

$$x^2 + y^2 = r^2, (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r_1^2.$$

Diese Kreise schneiden sich in zwei Punkten, welche auf der Sehne

$$2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 = r^2 - r_1^2$$

liegen. Berühren sich die Kreise, so muss diese gerade Linie Tangente an beiden Seiten sein. Liegt der Punkt x' , y' auf dem ersten Kreise, so ist die Gleichung der Tangente in diesem Punkte $xx' + yy' = r^2$. Es muss also sein

$$nx' = -2\alpha, ny' = -2\beta; r^2 - r_1^2 + \alpha^2 + \beta^2 = nr^2, x'^2 + y'^2,$$

also $(\alpha^2 + \beta^2 - [r_1^2 - r^2])^2 = 4r^2(\alpha^2 + \beta^2)$.

Hieraus folgt $\alpha^2 + \beta^2 = (r + r_1)^2$ oder $\alpha^2 + \beta^2 = (r - r_1)^2$, d. h. der Ort für den Mittelpunkt eines Kreises vom gegebenen Radius r_1 , welcher einen gegebenen Kreis mit dem Radius R 1) von aussen berührt, ist der mit dem Radius $r + r_1$ um den Mittelpunkt des gegebenen festen Kreises beschriebene konzentrische Kreis, 2) von innen berührt, ist der mit dem Radius $r - r_1$ oder $r_1 - r$ um den Mittelpunkt des gegebenen festen Kreises beschriebene konzentrische Kreis.

373, 374. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit gegebenem Radius, welcher eine gegebene
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade Linie } L \\ \text{Kreisperipherie } O \end{array} \right\}$ unter einer gegebenen Sehne oder unter

einem gegebenen Winkel schneidet, besteht aus zwei mit
 $\left. \begin{array}{l} L \text{ parallel gezogenen geraden Linien} \\ O \text{ konzentrischen Kreisen} \end{array} \right\}$.

375. Der gesuchte Ort ist die auf die Verbindungslinie der gegebenen Punkte errichtete Mittelsenkrechte.

376. Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei gegebene geraden Linien berührt, besteht aus den Halbierungslinien der beiden Paar Scheitelwinkel.

377. Die beiden geraden Linien seien OM , ON , welche den Winkel α einschliessen. O sei der Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems, OM sei die Axe der x ; ferner seien $PM = s$, $QN = s_1$ die gegebenen Abschnitte. Da durch die vier Punkte P , M , Q , N ein Kreis gehen soll, so ist nach Aufg. 339

$$OP(OP + s) = OQ(OQ + s_1).$$

Ist C des Kreises Mittelpunkt, so ist

$$OP + \frac{s}{2} = OC \cos COP = OC \cos \vartheta,$$

und ebenso

$$OQ + \frac{s_1}{2} = OC \cos(\alpha - \vartheta).$$

Es ist also

$$OC^2 \cos^2 \vartheta - \frac{s^2}{4} = (OC \cos \vartheta \cos \alpha + OC \sin \vartheta \sin \alpha)^2 - \frac{s_1^2}{4}$$

oder, wenn x , y die Koordinaten von C sind:

$$x^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = \frac{s^2 - s_1^2}{4}$$

oder

$$(x^2 - y^2) \operatorname{tg} \alpha - 2xy = \frac{s^2 - s_1^2}{2 \sin 2\alpha}.$$

Sind die beiden geraden Linien parallel, so wird x unendlich gross, in diesem Falle ist der geometrische Ort von C eine mit den geraden Linien parallele gerade Linie.

378. Der gesuchte Ort beschreibt eine gerade Linie.

379. Der gesuchte Ort folgt aus Aufg. 377, indem man $s = 0$ setzt.

380. Den zu bestimmenden Ort erhält man aus Aufg. 378, wenn man α oder α' gleich Null setzt.

381, 382. Die Aufg. 381 führt man auf die Aufg. 366 zurück. Der Ort der Aufg. 382 ist die Polare des Punktes O .

383, 384. O ist der gegebene Scheitel, M die Basisecke, welche in einem Kreise oder in einer geraden Linie sich bewegt, N die andere Basisecke; $ON = \varrho$, $OM = \varphi'$, $\sphericalangle MON = \alpha$, $\sphericalangle COM = \vartheta'$, $\varphi' = \kappa^2 \varrho$ oder $\varphi' = \frac{\kappa^2}{\varrho}$. Da M auf einem gegebenen Kreise $\varrho'^2 - 2d\varphi' \cos(\vartheta' - \beta) + d^2 - r^2 = 0$, oder auf einer gegebenen geraden Linie $\varphi' \cos(\vartheta' - \beta) = p$ sich bewegt, so erhält man die Gleichung des gesuchten Ortes dadurch, dass man für ϑ' den Winkel $\alpha - \vartheta$ und für φ' resp. $\kappa^2 \varrho$, $\frac{\kappa^2}{\varrho}$ einsetzt.

385. Ist der gegebene Punkt M der Pol und d der Durchmesser des Kreises, so ist die Gleichung des Kreises $\varrho = d \cos \vartheta$. Die Gleichungen der drei Kreise über den Sehnen sind resp. $\varrho = d \cos \alpha \cos(\vartheta - \alpha)$, $\varrho = d \cos \beta \cos(\vartheta - \beta)$, $\varrho = d \cos \gamma \cos(\vartheta - \gamma)$. Die Polarkoordinaten der resp. Schnittpunkte dieser Kreise sind: $\vartheta = \alpha + \beta$, $\varrho = d \cos \alpha \cos \beta$; $\vartheta = \alpha + \gamma$, $\varrho = d \cos \alpha \cos \gamma$; $\vartheta = \beta + \gamma$, $\varrho = d \cos \beta \cos \gamma$. Da die Gleichung einer geraden Linie $\varrho \cos(\kappa - \vartheta) = p$ ist, so muss sein $\kappa = \alpha + \beta + \gamma$, $p = d \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, damit diese Linie durch die zwei ersten Schnittpunkte geht. Aus den Werten für κ , p folgt, dass diese gerade Linie auch durch den dritten Schnittpunkt geht.

Systeme von Kreisen.

386. 1) $x = \frac{41}{10}$, $y = \frac{\pm}{10} \sqrt{819}$;

2) $x = \frac{18}{85} \pm \frac{28}{85} \sqrt{26}$, $y = -\frac{21}{85} \pm \frac{24}{85} \sqrt{26}$;

3) $x = \frac{110}{41} \mp \frac{32i}{41} \sqrt{5}$, $y = \frac{88}{41} \pm \frac{40i}{41} \sqrt{5}$;

4) $x = 1$, $y = 1$; 5) $x = \frac{18 \pm 27i}{10}$, $y = \frac{3 \pm 18i}{10}$;

6) $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}}$, $y = -1$.

Die Gleichungen der Radikalaxen sind

1) $x = \frac{41}{10}$; 2) $6x - 7y = 3$; 3) $4y + 5x = 22$;

4) $2x + 3y = 5$; 5) $4x + 6y = 9$; 6) $y = -1$.

387. Die Gleichung der Radikalaxe ist $S - S' = 0$, oder $2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + r'^2 - r^2 + \alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2 = 0$.

388. 389. Die Gleichung $S - \lambda S' = 0$ stellt alle durch die Schnittpunkte der Kreise $S = 0$, $S' = 0$ gehenden Kreise dar. Ist $\lambda = 1$, so ist die Gleichung $S - S' = 0$ die der Radikalaxe.

390. Nach Aufg. 317, 318 ist der zu bestimmende Ort die Radikalaxe.

391. Sind die Gleichungen der Kreise $S = 0$, $S' = 0$ der Aufg. 387, so ist der Ort der Kreis $S - \kappa^2 S' = 0$.

392. Die Radikalaxe kann nur dann Tangente sein; wenn beide Kreise sich berühren; sie ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte.

393. Siehe Aufg. 386.

394. Der Ort ist die Radikalaxe der beiden Kreise.

395. Sind die Gleichungen der Kreise $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$, so sind die Gleichungen der Radikalaxen $S - S' = 0$, $S' - S'' = 0$, $S'' - S = 0$. Die Radikalaxen schneiden sich also in einem Punkte des Radikalcentrums.

$$\mathbf{396.} \quad x = -13\frac{1}{6}, \quad y = 9\frac{2}{3}.$$

397, 398, 399. Die Gleichung der Kreise, die eine gemeinschaftliche Radikalaxe haben, ist, unter Voraussetzung des Koordinatensystems in Aufg. 398, $x^2 + y^2 - 2\kappa x \pm d^2 = 0$. Schneidet der Kreis $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ das System der Kreise, so ist die Gleichung der Radikalaxen $(a + 2\kappa)x + by + c \mp d^2 = 0$; das Radikalcentrum ist $x = 0$, $y = \frac{\pm d^2 - c}{b}$.

Nimmt man das Kreissystem $x^2 + y^2 - 2\kappa x - d^2 = 0$, so erhält man den Satz 397.

400—402. Die Gleichung der Polare von x' , y' in Bezug auf $x^2 + y^2 - 2\kappa x - d^2 = 0$ ist $xx' + yy' - \kappa(x + x') + d^2 = 0$. Da κ unbestimmt ist, so geht diese Linie durch den Schnittpunkt der beiden geraden Linien $xx' + yy' + d^2 = 0$, $x + x' = 0$.

Die Koordinaten der Grenzpunkte sind $x' = \pm d$, $y' = 0$. Die Grenzpunkte des Systems $x^2 + y^2 - 2\kappa x - d^2 = 0$ sind

$x' = \pm id$, $y' = 0$. Die Grenzpunkte sind also reell, wenn die Kreise zwei imaginäre Punkte gemein haben, und sie sind imaginär, wenn die Kreise sich in reellen Punkten schneiden.

403. Die Mittelpunkte der beiden Kreise $S = 0$, $S' = 0$ haben die Entfernung D ; damit der Radius des Kreises $S - \lambda S' = 0$ verschwindet, muss sein

$$r'^2 \lambda^2 + (D^2 - r^2 - r'^2) \lambda + r^2 = 0.$$

Bestimmt man die Grenzpunkte des Systems $S - \lambda S' = 0$, so findet man, dass diese mit den Mittelpunkten der Kreise zusammenfallen, deren Radien verschwinden.

404—406. Wenn man von irgend einem Punkte $x=0$, $y=m$ der Radikalaxe Tangenten an die Kreise $x^2 + y^2 - 2\kappa x \pm d^2 = 0$ zieht, so ist der Ort der Berührungspunkte der Kreis $x^2 + y^2 - 2my = \pm d^2$, welcher durch die Grenzpunkte des Systems geht und das gegebene System unter rechten Winkeln schneidet. Aus den Gleichungen folgt, dass die Grenzpunkte des einen

Systems $\left\{ \begin{array}{l} \text{reell} \\ \text{imaginär} \end{array} \right\}$ sind, wenn die Grenzpunkte des andern

Systems $\left\{ \begin{array}{l} \text{imaginär} \\ \text{reell} \end{array} \right\}$ sind.

407. $2a_{13} a'_{13} + 2a_{23} a'_{23} = a_{33} + a'_{33}.$

408. Sind die Gleichungen von drei Kreisen $x^2 + y^2 + 2a_n x + 2b_n y + c_n = 0$, $n = 1, 2, 3$, so ist die Gleichung des Kreises, welcher diese senkrecht schneidet:

$$\left| \begin{array}{ccc} x^2 + y^2 + 2a_1 x + 2b_1 y, & x + a_1, & y + b_1 \\ x^2 + y^2 + 2a_2 x + 2b_2 y, & x + a_2, & y + b_2 \\ x^2 + y^2 + 2a_3 x + 2b_3 y, & x + a_3, & y + b_3 \end{array} \right| = 0.$$

Die Gleichung des Kreises ist: $\left(x + \frac{25}{16}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1746}{256}.$

409. Der Kreis $S=0$ schneidet alle Kreise $kS' + lS'' + mS''' = 0$ senkrecht, wenn er die Kreise $S' = 0$, $S'' = 0$, $S''' = 0$ senkrecht schneidet. Hieraus folgt ferner, dass

410. alle Kreise, welche zwei Kreise senkrecht schneiden, eine gemeinsame Radikalaxe haben.

411. Die beiden Kreise sind zueinander senkrecht.

412. Der Kreis über MN habe die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, der Punkt M habe die Koordinaten $r, 0$, also der Punkt N die Koordinaten $-r, 0$. Ein Kreis, welcher diesen Kreis senkrecht schneidet, hat die Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

Die Gleichung der Polaren von M in Bezug auf den letzten Kreis ist $(r - \alpha)(x - \alpha) - (y - \beta)\beta = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$; diese gerade Linie geht aber durch den Punkt $-r, 0$, d. h. durch den Punkt N .

413. Aus Aufg. 412 folgt, dass der Ort der zu den drei Kreisen senkrechte Kreis ist.

414. Der geometrische Ort ist die Radikalaxe.

415. Sind die Gleichungen der gegebenen Kreise $S = 0$, $S' = 0$, so ist die Gleichung eines durch deren Schnittpunkte gehenden Kreises $mS + nS' = 0$. Ist α' der Winkel, unter welchem sich zwei Kreise mit den Radien R und r schneiden, und D die Entfernung der Kreismittelpunkte, so ist

$$D^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha'.$$

Wenn $S = 0$ die Gleichung des Kreises mit dem Radius r ist, so müssen die Koordinaten des Mittelpunktes des anderen Kreises der Gleichung $R^2 - 2Rr \cos \alpha' = S$ genügen. Schneidet der Kreis $mS + nS' = 0$ die Kreise $S = 0$, $S' = 0$ unter den Winkeln α, β , so ist $R^2 - 2Rr \cos \alpha = S$ und $R^2 - 2Rr' \cos \beta = S'$. Es ist aber daher

$$R^2 - 2R \frac{mr \cos \alpha + nr' \cos \beta}{m + n} = \frac{mS + nS'}{m + n},$$

welches die Bedingung ist, unter welcher ein Kreis mit dem Kreise $mS + nS' = 0$ den konstanten Winkel γ bildet. Ist r'' der Radius des Kreises $mS + nS' = 0$, so ist

$$(m + n) r'' \cos \gamma = mr \cos \alpha + nr' \cos \beta.$$

416. In diesem Falle ist $\gamma = 0$, also

$$(m + n) r'' = mr \cos \alpha + nr' \cos \beta.$$

Ist die Entfernung der Mittelpunkte der Kreise S, S' gleich D , so ist

$$(m + n)^2 r''^2 = (m + n) (mr^2 + nr'^2) - mn D^2$$

oder

$$(mr \cos \alpha + nr' \cos \beta)^2 = (m + n) (mr^2 + nr'^2) - mn D^2.$$

Hieraus erhält man für $\frac{m}{n}$ zwei Werte, also zwei feste Kreise $m_1 S + n_1 S'_1 = 0$, $m_2 S + n_2 S' = 0$.

417. Wenn man die Radikalaxe zur Axe der y und die Verbindungslinie der Mittelpunkte zur Axe der x macht, so sind die Gleichungen der Kreise $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + y^2 + 2ax = r^2$. Von dem Punkte M des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ziehe man die Tangente MB an den andern Kreis, es ist dann nach Aufg. 318, 319 $MB^2 = x^2 + y^2 + 2ax - r^2$; da hier x, y die Koordinaten von M sind, so ist $\frac{MB^2}{x} = 2a$.

418, 419. Die Gleichungen der zwei Kreise seien

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = r_1^2, \quad (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 = r_2^2.$$

Das eine Tangentenpaar geht durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt

$$x' = \frac{\alpha_2 r_1 - \alpha_1 r_2}{r_1 - r_2}, \quad y' = \frac{\beta_2 r_1 - \beta_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

und das andere Tangentenpaar geht durch den inneren Ähnlichkeitspunkt

$$x'' = \frac{\alpha_2 r_1 + \alpha_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad y'' = \frac{\beta_2 r_1 + \beta_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Wenn die Kreise sich in reellen Punkten schneiden, so ist das Tangentenpaar durch den inneren Ähnlichkeitspunkt imaginär.

Die resp. Gleichungen dieser Tangentenpaare sind:

$$\begin{aligned} & [(x' - \alpha_1)^2 + (y' - \beta_1)^2 - r_1^2] [(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - r_1^2] \\ & = [(x - \alpha_1)(x' - \alpha_1) + (y - \beta_1)(y' - \beta_1) - r_1^2]^2, \\ & [(x'' - \alpha_1)^2 + (y'' - \beta_1)^2 - r_1^2] [(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - r_1^2] \\ & = [(x - \alpha_1)(x'' - \alpha_1) + (y - \beta_1)(y'' - \beta_1) - r_1^2]^2. \end{aligned}$$

Setzt man statt α_1, β_1, r_1 die Werte α_2, β_2, r_2 , so erhält man dieselben geraden Linien.

Die Kreise unter 5), 6) bestimmen keine gemeinschaftlichen reellen Tangenten; die Ähnlichkeitspunkte dieser Kreise fallen mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte zusammen.

1) Da der eine Kreis imaginär ist, so haben die Kreise keine gemeinschaftlichen reellen Tangenten und keine reellen Ähnlichkeitspunkte. 2) Die Gleichungen der reellen Tangenten sind $x = -3$, $3x - 4y = 15$, welche sich im äusseren Ähnlichkeitscentrum $(-3, -6)$ schneiden; das innere Ähnlich-

keitscentrum $\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ ist der Schnittpunkt des imaginären gemeinschaftlichen Tangentenpaares. 3) Die beiden gemeinschaftlichen reellen Tangenten $-x + \sqrt{3}y = 6 + 3\sqrt{3}$, $-x - \sqrt{3}y = 6 - 3\sqrt{3}$ gehen durch das äussere Ähnlichkeitscentrum $(-6, 3)$; die beiden imaginären gemeinschaftlichen Tangenten gehen durch das innere Ähnlichkeitscentrum $\left(2\frac{8}{9}, 3\right)$. 4) Durch das äussere Ähnlichkeitscentrum $(10, 14)$ geht das gemeinschaftliche Tangentenpaar: $(10 - 7\sqrt{70})x + (14 + 5\sqrt{70})y = 296$, $(10 + 7\sqrt{70})x + (14 - 5\sqrt{70})y = 296$ und durch das innere Ähnlichkeitscentrum $\left(3\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}\right)$ geht das Tangentenpaar: $(30 - 7\sqrt{38})x + (42 + 5\sqrt{38})y = 296$, $(30 + 7\sqrt{38})x + (42 - 5\sqrt{38})y = 296$.

420 – 423. Diese Sätze folgen einfach aus den allgemeinen Gleichungen in Aufg. 418. Der Punkt O sei der Ähnlichkeitspunkt, Oa und Ob seien die Axen; es ist $Oa = m \cdot O\alpha$, $Ob = m \cdot O\beta$. Ist die Gleichung des Kreises durch $\alpha\beta, \alpha'\beta'$ von der Form

$$a_{11}(x^2 + 2xy \cos \varphi + y^2) + 2(a_{13}x + a_{23}y) + a_{33} = 0,$$

so ist die Gleichung des anderen Kreises

$$a_{11}(x^2 + 2xy \cos \varphi + y^2) + 2m(a_{13}x + a_{23}y) + m^2a_{33} = 0.$$

Die Gleichung der Radikalaxe ist also

$$2(a_{13}x + a_{23}y) + (m + 1)a_{33} = 0.$$

Sind ferner die Gleichungen von $\alpha\beta, \alpha'\beta'$:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \quad \frac{x}{p'} + \frac{y}{q'} = 1,$$

so sind die Gleichungen von $ab, a'b'$:

$$\frac{x}{mp} + \frac{y}{mq} = 1, \quad \frac{x}{mp'} + \frac{y}{mq'} = 1.$$

Hieraus folgt, dass $ab \parallel \alpha\beta$, $a'b' \parallel \alpha'\beta'$ und dass ab und $\alpha'\beta'$, $a'b'$ und $\alpha\beta$ sich in der Radikalaxe treffen.

424, 425. Die Koordinaten der Ähnlichkeitspunkte des ersten und zweiten Kreises und des ersten und dritten Kreises sind nach Aufg. 418

$$\left(\frac{r_1 \alpha_2 - r_2 \alpha_1}{r_1 - r_2}, \frac{r_1 \beta_2 - r_2 \beta_1}{r_1 - r_2} \right), \left(\frac{r_1 \alpha_3 - r_3 \alpha_1}{r_1 - r_3}, \frac{r_1 \beta_3 - r_3 \beta_1}{r_1 - r_3} \right);$$

diese Ähnlichkeitspunkte liegen in der geraden Linie, der Axe der Ähnlichkeit:

$$[r_1(\beta_2 - \beta_3) + r_2(\beta_3 - \beta_1) + r_3(\beta_1 - \beta_2)]x - [r_1(\alpha_2 - \alpha_3) + r_2(\alpha_3 - \alpha_1) + r_3(\alpha_1 - \alpha_2)]y + r_1(\beta_2 \alpha_3 - \alpha_2 \beta_3) + r_2(\beta_3 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_3) + r_3(\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1) = 0.$$

In dieser Linie liegt auch der dritte Ähnlichkeitspunkt

$$x = \frac{r_2 \alpha_3 - r_3 \alpha_2}{r_2 - r_3}, \quad y = \frac{r_2 \beta_3 - r_3 \beta_2}{r_2 - r_3}.$$

426. Die Kreise der Aufg. 396 haben die Ähnlichkeitsaxe

$$(\sqrt{3} + 5\sqrt{5} - 6\sqrt{7})x - (\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7})y + 3\sqrt{3} + 9\sqrt{5} - 6\sqrt{7} = 0;$$

die Kreise der Aufg. 408 haben die Ähnlichkeitsaxe

$$x(7\sqrt{7} - 5\sqrt{5} - 6) - y(\sqrt{7} - 3\sqrt{5} + 6) - 3\sqrt{7} - 7\sqrt{5} - 18 = 0.$$

427. Dieser Satz folgt aus 425.

428, 429. Die Tangente MT' schneide D_1 in A' ; es sei $AN \parallel MT'$, $A'N \parallel MT$ und P der Pol von D . Es geht MN durch die Mitte J von AA' ; schneidet TT' die gerade Linie D in P' , so ist das Büschel $M(TT'PP')$ harmonisch; da AA' parallel D ist und J in der Mitte von AA' liegt, so befindet sich J auf der geraden Linie MP ; es liegen also MNP in der

geraden Linie MP . Es ist ferner $\frac{PN}{PM} = \frac{2d_1 - d}{d} = \text{konstant}$,

wenn d, d_1 die Abscissen KD, KD_1 sind. Ist die Gleichung des gegebenen Kreises $x^2 + y^2 = r^2$, so sind die Koordinaten von $P \left(\frac{r^2}{d}, 0 \right)$. Setzt man $a = \frac{d}{r^2}$, so ist die Gleichung von

$PT: ax + by = 1$; die Gleichungen der Tangenten MT, MT' sind:

$$\frac{a - bD}{a^2 + b^2}x + \frac{b + aD}{a^2 + b^2}y = r^2, \quad \frac{a + bD}{a^2 + b^2}x + \frac{b - a\sqrt{D}}{a^2 + b^2}y = r^2, \\ D^2 = r^2(a^2 + b^2) - 1.$$

Der Punkt A habe die Koordinaten d_1, y_1 , es ist mithin

$$\frac{b + aD}{a^2 + b^2}y_1 = r^2 - \frac{a - bD}{a^2 + b^2}d_1$$

und die Gleichung von AN ist

$$\frac{a + bD}{r(a^2 + b^2)} x + \frac{b - aD}{r(a^2 + b^2)} y = \frac{a + bD}{r(a^2 + b^2)} d_1 + \frac{b - aD}{r(a^2 + b^2)} y_1$$

oder $x \cos \varphi + y \sin \varphi = d_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi.$

Es ist aber $a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$, und durch Elimination von b erhält man die Gleichung für AN :

$$\left(x - 2r^2 \frac{d_1 - d}{r^2 - d^2} \right) \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{r^3 + d^2 r - 2d_1 d r}{r^2 - d^2} = c.$$

Diese gerade Linie ist aber Tangente an den Kreis

$$\left(x - 2r^2 \frac{d_1 - d}{r^2 - d^2} \right)^2 + y^2 = c^2.$$

Der Punkt P ist ein Ähnlichkeitspunkt dieses Kreises und des gegebenen Kreises.

430—432. Die gerade Linie A schneide die geraden Linien BCD resp. in den Punkten B_1, C_1, A_1 , die gerade Linie B schneide die geraden Linien CD resp. in den Punkten D_1, E_1 und die geraden Linien CD schneiden sich in F_1 . Die geraden Linien $D_1\alpha, C_1\alpha, B_1\alpha$ seien die Halbierungslinien der Winkel $F_1D_1B_1, F_1C_1B_1, D_1B_1A_1$; die geraden Linien $B_1\delta, E_1\delta, A_1\delta$ halbieren resp. die Winkel $E_1B_1A_1, B_1E_1A_1, E_1A_1B_1$; die geraden Linien $D_1\beta, E_1\beta, F_1\beta$ halbieren resp. die Winkel $F_1D_1B_1, B_1E_1F_1, D_1F_1A_1$ und die geraden Linien $C_1\gamma, F_1\gamma, A_1\gamma$ halbieren resp. die Winkel $F_1C_1A_1, C_1F_1A_1, F_1A_1C_1$. Die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ liegen auf einem Kreise, denn es ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle \alpha \delta \gamma &= \sphericalangle B_1 E_1 \delta + \sphericalangle E_1 B_1 \delta = \frac{1}{2} \sphericalangle B_1 E_1 A_1 + \frac{1}{2} \sphericalangle E_1 B_1 A_1 \\ &= \frac{1}{2} \sphericalangle (180^\circ - B_1 A_1 E_1), \\ \sphericalangle \alpha \gamma \beta &= \sphericalangle F_1 C_1 \gamma + \sphericalangle C_1 F_1 \gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle F_1 C_1 A_1 + \frac{1}{2} \sphericalangle C_1 F_1 A_1 \\ &= \frac{1}{2} \sphericalangle (180^\circ - B_1 A_1 E_1). \end{aligned}$$

Nimmt man auf diesem Kreise einen Punkt M , welcher mit δ auf demselben Durchmesser liegt, so sind die geraden Linien $M\alpha, M\beta, M\gamma$ bez. senkrecht auf den geraden Linien $B_1\alpha, E_1\beta, A_1\gamma$. Es ist aber α das Centrum des Kreises, welcher die geraden Linien A_1B_1, B_1E_1, C_1F_1 berührt; ferner ist β das Centrum des Kreises, welcher die geraden Linien B_1E_1, A_1E_1 und C_1F_1 und schliesslich ist γ das Centrum des Kreises, welcher die geraden Linien

$A_1 E_1, A_1 B_1, C_1 F_1$ berührt. Die Senkrechte von α auf A schneidet A in dem Punkte a und die Senkrechte von β auf D trifft D in dem Punkte d . Der Mittelpunkt der geraden Linie da liegt auf der Radikalaxe der Kreise um δ und γ . Die Radien der Kreise um δ und γ sind

$$2 R_\delta = (A_1 B_1 - B_1 E_1 + E_1 A_1) \operatorname{tg} \frac{B_1 A_1 E_1}{2},$$

$$2 R_\gamma = (A_1 F_1 - F_1 C_1 + C_1 A_1) \operatorname{tg} \frac{B_1 A_1 E_1}{2}.$$

Ist der Punkt A_1 der Koordinatenursprung, setzt man $\angle B_1 A_1 E_1 = A$, so sind die Gleichungen der Kreise um δ und γ :

$$x^2 - 2 R_\delta x \cotg \frac{A}{2} + y^2 - 2 y R_\delta + R_\delta^2 \cotg^2 \frac{A}{2} = 0,$$

$$x^2 - 2 R_\gamma x \cotg \frac{A}{2} + y^2 - 2 y R_\gamma + R_\gamma^2 \cotg^2 \frac{A}{2} = 0.$$

Die Gleichung der Radikalaxe ist also

$$2x \cotg \frac{A}{2} + 2y = (R_\delta + R_\gamma) \cotg^2 \frac{A}{2}.$$

Der Punkt α ist der Schnittpunkt der geraden Linien $\delta B_1, \gamma C_1$, und der Punkt β ist der Schnittpunkt der geraden Linien $\delta E_1, \gamma F_1$. Diese Punkte haben die Koordinaten $B_1 (A_1 B_1 \cos A, A_1 B_1 \sin A)$, $C_1 (A_1 C_1 \cos A, A_1 C_1 \sin A)$, $E_1 (A_1 E_1, 0)$, $F_1 (A_1 F_1, 0)$.

433—438. Diese Sätze dienen dazu, die Aufg. 437 zu lösen. Die Gleichung eines Kreises sei $S \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$; ist M ein beliebiger Punkt der Ebene und O der Mittelpunkt des Kreises S , so ist $(OM)^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = S + r^2$. Schneidet ein Kreis K mit dem Radius R den Kreis S unter dem Winkel ϑ , so genügen die Koordinaten des Mittelpunkts nach Aufg. 415 der Bedingung $S = R^2 - 2 R r \cos \vartheta$. Schneidet dieser Kreis noch zwei andere unter dem Winkel ϑ , so ist ebenso $S_1 = R^2 - 2 R r_1 \cos \vartheta$, $S_2 = R^2 - 2 R r_2 \cos \vartheta$. Das Centrum des Kreises K liegt also auf der geraden Linie $(S - S_1)(r - r_2) = (S - S_2)(r - r_1)$. (Siehe Lös. 439—442.) Diese Linie geht durch das Radikalcentrum von S, S_1, S_2 und ist eine vom Ähnlichkeitspunkte auf eine Ähnlichkeitsaxe gefällte Senkrechte. Berühren sich zwei Kreise von innen, so ist $\vartheta = 0$, berühren sich zwei Kreise von aussen, so ist $\vartheta = 180^\circ$. Berührt also ein Kreis drei gegebene Kreise alle äusserlich oder innerlich,

so liegt dessen Mittelpunkt auf einer Senkrechten auf der Ähnlichkeitsaxe, welche die drei äusseren Ähnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise enthält. Der Mittelpunkt liegt aber auch auf einem Orte, den man durch Elimination von R zwischen den Gleichungen $S = R^2 + 2Rr$, $S_1 = R^2 + 2Rr_1$ erhält. Dieser Ort stellt aber keinen Kreis dar. Ist der Mittelpunkt des Kreises, dessen Berührungspunkt x, y mit dem gesuchten Kreise bestimmt werden soll, der Ursprung der Koordinaten, also ist $\alpha = \beta = 0$, so sind die Koordinaten des Mittelpunktes von $K: x_1 = \frac{x(R+r)}{r}$, $y_1 = \frac{y(R+r)}{r}$. Es ist aber für diesen

Mittelpunkt $S - S_1 = 2R(r - r_1)$, $S - S_2 = 2R(r - r_2)$, also ist $(R+r)(S-S_1) = R[(r-r_1)^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2]$, $S_n = (x - \alpha_n)^2 + (y - \beta_n)^2 - r_n^2$, $(R+r)(S-S_2) = R[(r-r_2)^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2]$.

Der Berührungspunkt ist also der Durchschnittspunkt der geraden Linie

$$\frac{2\alpha_1 x + 2\beta_1 y + r_1^2 - r^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 - (r_1 - r)^2} = \frac{2\alpha_2 x + 2\beta_2 y + r_2^2 - r^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_2 - r)^2}$$

oder

$$\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + (r_1 - r)r}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 - (r_1 - r)^2} = \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + (r_2 - r)r}{\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_2 - r)^2}$$

mit dem Kreise $S = 0$. Diese gerade Linie geht aber durch den Schnittpunkt der beiden geraden Linien

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + (r_1 - r)r \equiv L_1 = 0, \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + (r_2 - r)r \equiv L_2 = 0.$$

Die gerade Linie $L_1 = 0$ ist also die Polare des Ähnlichkeitspunktes von $S = 0$, $S_1 = 0$ in Bezug auf den Kreis $S = 0$, und die gerade Linie $L_2 = 0$ ist die Polare des Ähnlichkeitspunktes der Kreise $S = 0$, $S_2 = 0$ in Bezug auf den Kreis $S = 0$; der Schnittpunkt der geraden Linien $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ ist also der Pol der Ähnlichkeitsaxe der drei Kreise $S = 0$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ in Bezug auf den Kreis $S = 0$.

$$\text{Die gerade Linie } \frac{L_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 - (r_1 - r)^2} = \frac{L_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_2 - r)^2}$$

geht aber durch das Radikalcenrum der drei Kreise $S = 0$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Um also einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt, zieht man irgend eine der vier Ähnlichkeitsaxen der drei Kreise, nimmt ihren Pol in Bezug

auf jeden Kreis, verbindet die so gefundenen Punkte (P, P_1, P_2) mit dem Radikalcentrum R ; diese Linien RP, RP_1, RP_2 schneiden die Kreise in den Punkten AB, A_1B_1, A_2B_2 und der durch AA_1A_2 gehende Kreis berührt die drei Kreise und ebenso der durch BB_1B_2 gehende Kreis. Ausser diesen beiden Kreisen giebt es noch sechs andere Kreise, welche die gegebenen Kreise berühren.

439—442. Die Gleichungen der drei Kreise K seien

$$\begin{aligned}(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 &= 0 \equiv K, \\ (x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 - r_1^2 &= 0 \equiv K_1, \\ (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 - r_2^2 &= 0 \equiv K_2.\end{aligned}$$

Liegen die Punkte $A_2: x_1, y_1; B_2: x_2, y_2; C_2: x_3, y_3$ auf dem Kreise $O = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$, so ist

$$\begin{aligned}(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 - r^2 &= (x_2 - \alpha_1)^2 + (y_2 - \beta_1)^2 - r_1^2 \\ &= (x_3 - \alpha_2)^2 + (y_3 - \beta_2)^2 - r_2^2 = (A_1A_2)^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 &= (R - r)^2 + (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 - r^2, \\ (\alpha_1 - a)^2 + (\beta_1 - b)^2 &= (R - r_1)^2 + (x_2 - \alpha_1)^2 + (y_2 - \beta_1)^2 - r_1^2, \\ (\alpha_2 - a)^2 + (\beta_2 - b)^2 &= (R - r_2)^2 + (x_3 - \alpha_2)^2 + (y_3 - \beta_2)^2 - r_2^2.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}\frac{K - K_1}{r - r_1} &= \frac{K_2 - K_1}{r_2 - r_1} = \frac{K - K_2}{r - r_2}, \\ K - K_n &= -2R(r - r_n), \quad n = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

wenn in den K statt x, y die Koordinaten des Mittelpunktes von O gesetzt sind. Der Mittelpunkt der Kreise O beschreibt also eine gerade Linie, welche durch das Radikalcentrum der drei Kreise K, K_1, K_2 geht. Ist noch ein Kreis K_3 gegeben, so ist der Mittelpunkt von O der Durchschnittspunkt der beiden geraden Linien

$$\frac{K - K_1}{r - r_1} = \frac{K_2 - K_1}{r_2 - r_1}, \quad \frac{K_3 - K_1}{r_3 - r_1} = \frac{K_3 - K_2}{r_3 - r_2}.$$

Der Radius R dieses Kreises ist bestimmt durch die Gleichung

$$2a(\alpha_n - \alpha) + 2b(\beta_n - \beta) - 2R(r_n - r) = \alpha_n^2 + \beta_n^2 - r_n^2 - \alpha^2 - \beta^2 + r^2;$$

$n = 1, 2, 3.$

Wenn in Aufg. 439 $A_1A_2 = 0$ ist, so fällt diese Aufgabe mit der Aufg. 437 zusammen. Wenn man also zeigen kann,

dass die Kreise O einen bestimmten Ähnlichkeitspunkt besitzen, so ist Aufg. 440 bewiesen. Die Koordinaten des Ähnlichkeitspunktes für zwei Kreise O sind

$$x = \frac{a' R - a R'}{R - R'}, \quad y = \frac{b' R - b R'}{R - R'}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} 2(\alpha_1 - \alpha) a R' + 2(\beta_1 - \beta) b R' - 2R(r_1 - r) R' \\ = R'(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2 - \alpha^2 - \beta^2 + r^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha_1 - \alpha) a' R + 2(\beta_1 - \beta) b' R - 2R'(r_1 - r) R \\ = R(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - r_1^2 - \alpha^2 - \beta^2 + r^2), \end{aligned}$$

mithin liegt der Ähnlichkeitspunkt auf der geraden Linie

$$2(\alpha_1 - \alpha)x + 2(\beta_1 - \beta)y + r_1^2 - r^2 + \alpha^2 - \alpha_1^2 + \beta^2 - \beta_1^2 \equiv K_1 - K = 0.$$

Das Radikalcentrum der drei gegebenen Kreise ist Ähnlichkeitspunkt der Kreise O .

Das Centrum der Kreise O beschreibt dieselbe gerade Linie, welche das Centrum des Kreises beschreibt, der drei Kreise $K = 0$, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ unter gleichen Winkeln schneidet. Man hat die Wahl, welchen der zwei Winkel, welche die Kreise miteinander bilden, man als den Winkel ihres Durchschnittes ansehen will. Ebenso kann man über die Richtung der Tangenten $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ verfügen, d. h. man kann das Vorzeichen der r , r_1 , r_2 in das entgegengesetzte überführen. Der Ort der Mittelpunkte der Kreise O ist eine Normale vom Ähnlichkeitscentrum auf irgend eine der vier Ähnlichkeitsachsen. Geht nämlich $A_1 A_2$ durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von K und O , $B_1 B_2$ durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von K_1 und O und $C_1 C_2$ durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von O und K_2 , so erhalten die r die entgegengesetzten Zeichen und der Ort des Mittelpunktes von O ist dieselbe gerade Linie wie oben. Wenn aber $A_1 A_2$ durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von K und O geht und die Tangenten $B_1 B_2$, resp. $C_1 C_2$ durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt von K_1 und O resp. K_2 und O geht, so ist die Gleichung des Ortes des Mittelpunktes von O :

$$\frac{K - K_1}{r + r_1} = \frac{K_1 - K_2}{r_2 - r_1} = \frac{K - K_2}{r + r_2}.$$

443. Wenn die Tangenten parallel der Axe der y sind, so sind deren Gleichungen $x = \alpha \pm r$, $x = \alpha_1 \pm r_1$, $x = \alpha_2 \pm r_2$, $x = \alpha_3 \pm r_3$. Aus diesen Gleichungen folgen einfach die Doppelverhältnisse.

444. Haben die vier Kreise die Radien r , r_1 , r_2 , r_3 und der fünfte Kreis den Radius R , sind A' , B' , C' , D' die Berührungspunkte und O der Mittelpunkt des fünften Kreises, so ist

$$A'B' \cdot C'D' + A'D' \cdot B'C' = A'C' \cdot B'D'$$

und

$$\begin{aligned} A'B' &= \frac{R \cdot AB}{\sqrt{(R-r)(R-r_1)}}, & C'D' &= \frac{R \cdot CD}{\sqrt{(R-r_2)(R-r_3)}}, \\ A'D' &= \frac{R \cdot AD}{\sqrt{(R-r)(R-r_3)}}, & B'C' &= \frac{R \cdot BC}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}}, \\ A'C' &= \frac{R \cdot AC}{\sqrt{(R-r)(R-r_2)}}, & B'D' &= \frac{R \cdot BD}{\sqrt{(R-r_1)(R-r_3)}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $AB \cdot CD \pm AD \cdot BC \pm AC \cdot BD = 0$.

445. Der Radius R genügt der Gleichung

$$\begin{aligned} &c^2 \cdot (R+r_2)^2 \{ c^2 + (R+r_2)^2 - b^2 - (R+r)^2 - a^2 - (R+r_1)^2 \} \\ &+ b^2 (R+r_1)^2 \{ b^2 + (R+r_1)^2 - c^2 - (R+r_2)^2 - a^2 - (R+r)^2 \} \\ &+ a^2 (R+r)^2 \{ a^2 + (R+r)^2 - c^2 - (R+r_1)^2 - b^2 - (R+r_2)^2 \} \\ &+ a^2 (R+r_2)^2 (R+r_1)^2 + b^2 (R+r)^2 (R+r_2)^2 + c^2 (R+r)^2 \\ &\quad \times (R+r_1)^2 + a^2 b^2 c^2 = 0. \end{aligned}$$

446. Die Gleichung ist:

$$\begin{vmatrix} 0, & AB^2, & AC^2, & AD^2 \\ AB^2, & 0, & BC^2, & BD^2 \\ AC^2, & BC^2, & 0, & CD^2 \\ AD^2, & BD^2, & CD^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

447–451. Die Gleichung der Inverse des Kreises

$$x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in Bezug auf: 1) den Mittelpunkt ist:

$$(x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{13}^2 + a_{23}^2)(a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}) = 1$$

2) den Koordinatenursprung ist:

$$a_{33}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = 0,$$

3) den Punkt (a, b) ist:

$$(a^2 + b^2 + 2a_{13}a + 2a_{23}b + a_{33}) \{ (x - a)^2 + (y - b)^2 \} + 2a_{13}(x - a) + 2a_{23}(y - b) + 1 = 0.$$

Liegt der Punkt O auf dem Kreise, so ist die Inverse eine gerade Linie. Die Inverse der geraden Linie $ax + by = c$ in Bezug auf den Punkt x', y' ist der Kreis

$$a(x - x') + b(y - y') = \{ (x - x')^2 + (y - y')^2 \} (c - ax' - by');$$

der Kreis geht also durch den Punkt x', y' .

Beschreibt man um den Punkt O , Centrum der Inversion, einen Kreis mit dem Radius Eins, so hat dieser Kreis mit dem gegebenen Kreis und dessen Inverse dieselbe Radikalaxe. Ist der Punkt O der Ursprung der Koordinaten, so hat der Kreis die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$; der gegebene Kreis $x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ hat die Inverse $a_{33}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = 0$. Diese drei Kreise haben die gemeinschaftliche Radikalaxe $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + 1 = 0$. Nimmt man $OQ = r^2 : OP$, so hat der um den Punkt O als Mittelpunkt mit dem Radius r beschriebene Kreis mit einem Kreis und seiner Inverse dieselbe Radikalaxe. Je zwei Paare entsprechender Punkte liegen auf einem Kreise, welcher den festen Kreis um das Centrum der Inversion orthogonal schneidet.

Wenn ϱ der Radius des festen Kreises um O , der Radius der Inversion, und r, r' ; d, d' die Radien und die Entfernungen der Mittelpunkte vom Centrum der Inversion für zwei entsprechende Kreise, ferner t, t' die Längen ihrer vom Centrum der Inversion ausgehenden gemeinschaftlichen Tangenten sind, so ist $d : d' = r : r' = t : t' = d^2 - r^2 : \varrho^2$. Es ist also

$$d' = \frac{\varrho^2}{d^2 - r^2} d, \quad r' = \frac{\varrho^2}{d^2 - r^2} r.$$

Wenn der Anfangspunkt der Koordinaten das Centrum der Inversion ist, so entspricht dem Punkte x, y der Punkt

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

und umgekehrt entspricht dem Punkte x', y' der Punkt

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Hieraus folgt, dass irgend vier Punkte einer geraden Linie oder eines Kreises und ihre vier nach Inversion entsprechenden gleiche Doppelverhältnisse haben.

Sind die Gleichungen von zwei Kreisen $x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ und $x^2 + y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0$, so sind die Gleichungen der Inversen in Bezug auf den Koordinatenursprung bez.

$$x^2 + y^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{33}}x + 2\frac{a_{23}}{a_{33}}y + \frac{1}{a_{33}} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2\frac{a'_{13}}{a'_{33}}x + 2\frac{a'_{23}}{a'_{33}}y + \frac{1}{a'_{33}} = 0.$$

Ist D die Entfernung der Centra der beiden ersten Kreise, D_1 die Entfernung der Centra der beiden letzten Kreise, sind R, R', R_1, R'_1 die Radien dieser Kreise, so ist

$$D^2 = (a_{13} - a'_{13})^2 + (a_{23} - a'_{23})^2,$$

$$D_1^2 = \left(\frac{a_{13}}{a_{33}} - \frac{a'_{13}}{a'_{33}}\right)^2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{33}} - \frac{a'_{23}}{a'_{33}}\right)^2,$$

$$R^2 = a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}, \quad R'^2 = a'_{13}^2 + a'_{23}^2 - a_{33},$$

$$R_1^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}}{a_{33}^2}, \quad R'_1{}^2 = \frac{a'_{13}^2 + a'_{23}^2 - a'_{33}}{a'_{33}^2}.$$

Schneiden die beiden ersten Kreise sich unter dem Winkel α , so ist $D^2 - R^2 - R'^2 = -2RR' \cos \alpha$; hieraus folgt, dass die beiden Inversen sich unter demselben Winkel schneiden.

Berühren vier Kreise dieselbe gerade Linie in den Punkten A, B, C, D , so ist $AB \cdot CD + AD \cdot CB = AC \cdot BD$; bildet man die inverse Figur, so bleibt diese Relation ungeändert und man erhält einen Kreis, der vier andere Kreise berührt.

452—455. Sind die Gleichungen der Seiten des Vierecks $x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - \delta_n = 0 \equiv x_n$, $n = 1, 2, 3, 4$, so ist die Gleichung des Ortes $x_1 x_3 = k x_2 x_4$. Der Ort ist also eine Kurve zweiten Grades, welche durch die Ecken des Vierecks geht; er ist ein Kreis, wenn entweder $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$ oder $= 180^\circ + \alpha_2 + \alpha_4$ ist. $k = \pm 1$.

Fällt x_4 mit x_2 zusammen, so wird das Viereck zu einem Dreieck und der Ort $x_1 x_3 = k x_2^2$ hat die beiden Seiten $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ zu Tangenten, deren Berührungssehne $x_2 = 0$ ist. Ist das Dreieck gleichschenkelig, so ist der Ort ein Kreis.

456—458. Die Gleichung

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) (x_3 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) \\ + b (x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0$$

stellt jeden Kreis der Ebene dar. Die Gleichung

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = c$$

stellt einen Kreis dar, welcher konzentrisch ist zu dem dem Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ umschriebenen Kreise

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0.$$

459. Es muss sein

$$a_{11} \sin^2 A_2 + a_{22} \sin^2 A_1 - 2a_{12} \sin A_1 \sin A_2 = a_{22} \sin^2 A_3 \\ + a_{33} \sin^2 A_2 - 2a_{23} \sin A_2 \sin A_3 = a_{33} \sin^2 A_1 + a_{11} \sin^2 A_3 \\ - 2a_{13} \sin A_3 \sin A_1.$$

460. Das Dreieck muss gleichschenkelig sein.

461, 462. Die drei Mittelpunkte der Seiten, die drei Fusspunkte der Höhen liegen in dem Kreise

$$x_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + x_2^2 \sin A_2 \cos A_2 + x_3^2 \sin A_3 \cos A_3 \\ = x_1 x_2 \sin A_3 + x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2.$$

Sind die Gleichungen der Seiten des von den Berührungspunkten des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises gebildeten Dreiecks $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$ und die Winkel dieses Dreiecks

$$A'_1 = 90 - \frac{1}{2} A_1, \quad A'_2 = 90 - \frac{1}{2} A_2, \quad A'_3 = 90 - \frac{1}{2} A_3,$$

so ist die Gleichung des Kreises

$$x'_2 x'_3 \sin A'_1 + x'_3 x'_1 \sin A'_2 + x'_1 x'_2 \sin A'_3 = 0.$$

Es ist aber für die Punkte des Kreises $x_1'^2 = x_2 x_3$, $x_2'^2 = x_3 x_1$, $x_3'^2 = x_1 x_2$, mithin ist die Gleichung des dem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Kreises

$$x_1^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A_1 + x_2^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A_2 + x_3^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A_3 = 0.$$

Hat der dem Dreieck eingeschriebene Kreis den Radius r und der durch die Seitenmittelpunkte des Dreiecks gehende Kreis den Radius ϱ , so ist die Entfernung der Mittelpunkte dieser beiden Kreise $D = r - \varrho$; die beiden Kreise berühren einander.

Die Entfernung der Mittelpunkte des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises ist $\sqrt{R^2 - 2Rr}$.

463. Es muss sein

$$\begin{aligned} a_2 \sin A_3 + a_3 \sin A_2 &= \pm (a_3 \sin A_1 + a_1 \sin A_0) \\ &= \pm (a_1 \sin A_2 + a_2 \sin A_1). \end{aligned}$$

Die Kegelschnitte. Systeme von Kegelschnitten.

464—486. Durch fünf beliebige Punkte kann man nur einen einzigen Kegelschnitt legen und umgekehrt ist ein Kegelschnitt vollständig durch fünf Punkte bestimmt. Liegen von den fünf Punkten drei in einer geraden Linie, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei gerade Linien, von denen die eine die drei Punkte enthält, die andere durch die noch übrigen Punkte geht. Jede gerade Linie schneidet den Kegelschnitt im allgemeinen in zwei Punkten.

Die Gleichung des Kegelschnittes in Polarkoordinaten ist

$$(a_{11} m^2 + 2a_{12} mn + a_{22} n^2) \varrho^2 + 2(a_{13} m + a_{23} n) \varrho + a_{33} = 0,$$

$$m = \frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi}, \quad n = \frac{\sin(\omega - \vartheta)}{\sin \varphi}.$$

Ist das Koordinatensystem rechtwinklig, so ist $\varphi = 90^\circ$.

Verschiebt man das Koordinatensystem parallel nach dem Punkte x', y' , so heisst die Gleichung des Kegelschnittes

$$a_{11} x'^2 + 2a_{12} x'y' + a_{22} y'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a'_{33} = 0,$$

wenn man setzt

$$a'_{13} = a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13},$$

$$a'_{23} = a_{12} x' + a_{22} y' + a_{23},$$

$$a'_{33} = a_{11} x'^2 + 2a_{12} x'y' + a_{22} y'^2 + 2a_{13} x' + 2a_{23} y' + a_{33}. \text{ Siehe } \text{Aufg. 23.}$$

Ist $a'_{13} = 0$, $a'_{23} = 0$, so ist der Mittelpunkt des Kegelschnitts Koordinatenursprung und es ist

$$x' = \frac{a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}, \quad y' = \frac{a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}.$$

Die Transformation ist unmöglich, wenn $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ist — Parabel.

Ist in Aufg. 473 das Koordinatensystem schiefwinklig, der Koordinatenwinkel φ ; U, V die neuen Axen, $\sphericalangle XO V = \alpha$,

$\sphericalangle YOU = \alpha_1$, $\sphericalangle YOV = \beta$, $\sphericalangle YOV = \beta_1$, also $\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \varphi$,
 $\beta - \alpha = \alpha_1 - \beta_1 = \omega$, so muss man, um Aufg. 473 auszuführen,
 in die Gleichung Aufg. 464 setzen

$$y = \frac{u \sin \alpha + v \sin \beta}{\sin \varphi}, \quad x = \frac{u \sin (\varphi - \alpha) + v \sin (\varphi - \beta)}{\sin \varphi}.$$

Es seien die Axen senkrecht und die Gleichung des Kegelschnittes sei $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a'_{33} = 0$. Man muss statt x und y bez. die Werte $x \cos \alpha - y \sin \alpha$, $x \sin \alpha + y \cos \alpha$,
 $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$ einsetzen, um die Gleichung des Kegelschnittes in der Form $Ax^2 + By^2 + C = 0$ zu erhalten.

Die geraden Linien $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ und alle diesen geraden Linien parallel gezogenen geraden Linien schneiden den Kegelschnitt Aufg. 464 in unendlicher Entfernung. Ist $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, so kann keine reelle gerade Linie gezogen werden, welche den Kegelschnitt im Unendlichen schneidet; alle Punkte des Kegelschnittes liegen im Endlichen — Ellipse; ist $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, so kann man durch jeden Punkt zwei gerade Linien ziehen, welche die Kurve im Unendlichen schneiden — Hyperbel; ist $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, so kann man durch jeden Punkt nur eine gerade Linie ziehen, welche die Kurve im Unendlichen schneidet — Parabel.

Die Aufg. 478—484 sind bei Aufg. 301 behandelt.

Die Gleichung in Aufg. 464 hat keine reelle geometrische Bedeutung, wenn die Relationen 486 bestehen.

Die Grössen $\triangle$ und α ändern sich durch Koordinatentransformation nicht.

487. 1) Die Kurve ist eine Hyperbel, welche von den geraden Linien $x + y = 0$, $x + 3y = 0$ im Unendlichen geschnitten wird. 2) Die Gleichung stellt eine Ellipse dar. 3) Die Kurve ist eine Ellipse. 4) Die Kurve ist eine Parabel, welche von der geraden Linie $x + y = 0$ im Unendlichen geschnitten wird. 5) Die Gleichung stellt eine Ellipse dar. 6) Die Kurve ist eine Hyperbel, welche von den geraden Linien $2x + \sqrt{2}y = 0$, $2x - \sqrt{2}y = 0$ im Unendlichen geschnitten wird. 7) Diese Parabel wird von der geraden Linie $y = 0$ im Unendlichen geschnitten. 8) Die Parabel wird von der geraden Linie

$x = 0$ im Unendlichen geschnitten. 9) Die geraden Linien $x = 0$, $y = 0$ schneiden die Hyperbel im Unendlichen. 10, 11) Die geraden Linien $x - y = 0$, $x + y = 0$ schneiden die Hyperbeln im Unendlichen. 12) Die Hyperbel wird von den geraden Linien $x = 0$, $x + y = 0$ im Unendlichen geschnitten. 13) Die Hyperbel wird von den geraden Linien $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ im Unendlichen geschnitten. 14) Die Gleichung stellt eine Ellipse dar. 15, 16) Siehe Aufg. 7, 8. 17) Die geraden Linien $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{5}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{5}y = 0$ schneiden die Hyperbel im Unendlichen. 18, 19) Diese Kurven sind Ellipsen. 20) Diese Hyperbel wird von den geraden Linien $3x - 2y = 0$, $3x + 2y = 0$ im Unendlichen geschnitten. 21) Die geraden Linien $x - y\sqrt{3} = 0$, $x + y\sqrt{3} = 0$ schneiden die Hyperbel im Unendlichen. 22) Die Kurve ist eine Ellipse. 23) Die Parabel wird von der geraden Linie $y = 0$ im Unendlichen geschnitten. 24) Die Kurve ist eine reelle Ellipse. 25) Die Gleichung stellt eine imaginäre Ellipse dar. 26) Die Kurve ist eine reelle Ellipse. 27) Die geraden Linien $x - y = 0$, $x + y = 0$ schneiden die Hyperbel im Unendlichen. 28, 29, 30) Die Kurven sind Parabeln. 31) Die Hyperbel wird von den geraden Linien $x - \sqrt{8}y = 0$, $x + \sqrt{8}y = 0$ im Unendlichen geschnitten. 32) Die Kurve ist eine imaginäre Ellipse.

Die Koordinaten der Mittelpunkte dieser Kegelschnitte sind:

- 1) $(-1, +1)$; 2) $(\frac{1}{2}, 0)$; 3) $(-3\frac{2}{3}, 8)$; 4) unendlich gross.
 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20) $(0, 0)$; 7) 8,
 15, 16) unendlich gross; 21) $(5, -1)$; 22) $(1, 1\frac{1}{3})$; 23, 28,
 29, 30) unendlich gross; 24) $(-5, \frac{4}{5})$; 25) $(1, -\frac{4}{5})$; 26) $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5})$;
 27) $(-\frac{5}{18}, 0)$; 31) $(9, 1)$; 32) $(1\frac{1}{5}, -\frac{12}{25})$.

Je zwei dieser Kegelschnitte schneiden sich im allgemeinen in vier Punkten.

Ist die Gleichung des einen Kegelschnittes

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

und die des andern Kegelschnittes

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0,$$

so erhält man die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kegelschnitte aus der Gleichung

$$\begin{aligned} y &= - \frac{a_{12}x + a_{23}}{a_{22}} \\ &\pm \frac{\sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x + (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})}}{a_{22}} \\ &= - \frac{a'_{12}x + a'_{23}}{a'_{22}} \\ &\pm \frac{\sqrt{(a'_{12}^2 - a'_{11}a'_{22})x^2 + 2(a'_{12}a'_{23} - a'_{22}a'_{13})x + (a'_{23}^2 - a'_{22}a'_{33})}}{a'_{22}}. \end{aligned}$$

488. 1) Eine Ellipse, 2) eine Hyperbel.

489. 1, 2) Eine Hyperbel, wenn a_{12} nicht gleich Null ist; ist $a_{12} = 0$ eine Parabel; 3) einen Kreis, wenn $a_{12} = 0$ ist.

490. Siehe Aufg. 470. Ist der Punkt

$$x' = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, \quad y' = \frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$$

der Koordinatenursprung, so ist die Gleichung des Kegelschnittes

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a'_{33} = 0.$$

Setzt man $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, so erhält man für einen bestimmten Wert von ϑ zwei an absoluter Grösse gleiche Werte für ϱ , d. h. alle Sehnen durch x' , y' werden im Punkte x' , y' halbiert.

491. Der Ort geht durch den Mittelpunkt; bilden die Sehnen mit der Axe der x den Winkel ϑ , so ist die Gleichung des Durchmessers

$$\cos \vartheta (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \sin \vartheta (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

492, 493. Für die Parabel ist $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$, also ist die gerade Linie $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ der geraden Linie $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ parallel. Die Durchmesser sind also parallel der geraden Linie $x\sqrt{a_{11}} + y\sqrt{a_{22}} = 0$; die Durchmesser schneiden

also die Parabel in einem endlichen und einem unendlich fernen Punkte.

494—497. Der Durchmesser in Aufg. 491 bildet mit der Axe der x einen Winkel ϑ' , welcher durch die Gleichung

$$a_{22} \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta' + a_{12} (\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg} \vartheta') + a_{11} = 0$$

bestimmt ist. Die Symmetrie in ϑ, ϑ' beweist den Satz 494. Der Winkel zwischen den konjugierten Durchmessern ist $\vartheta - \vartheta'$.

Stehen die konjugierten Durchmesser senkrecht, so ist

$$a_{12} \operatorname{tg}^2 \vartheta + (a_{11} - a_{22}) \operatorname{tg} \vartheta - a_{12} = 0.$$

Die beiden geraden Linien $a_{12}x^2 + (a_{11} - a_{22})xy - a_{12}y^2 = 0$, welche die Winkel zwischen den beiden geraden Linien $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ halbieren, sind den beiden Axen des Kegelschnittes parallel.

498—501. Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch die Punkte $x', y'; x'', y''$ geht, ist $\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''}$. Liegen aber $x', y'; x'', y''$ auf dem Kegelschnitt, so ist die Gleichung der Sehne durch $x', y'; x'', y''$:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = - \frac{a_{11}(x' + x'') + 2a_{12}y' + 2a_{13}}{a_{22}(y' + y'') + 2a_{12}x'' - 2a_{23}}.$$

Fällt x', y' mit x'', y'' zusammen, so ist die Gleichung der Tangente im Punkte x', y' :

$$a_{11}xx' + a_{12}(x'y + y'x) + a_{22}yy' + a_{13}(x + x') + a_{23}(y + y') + a_{33} = 0.$$

Vertauscht man hier den Punkt x, y mit dem Punkte x', y' , so stellt die Gleichung die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten dar, welche man von dem Punkte x', y' an den Kegelschnitt ziehen kann. Die Gleichung kann man auch schreiben:

$$x(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}) + y(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}) + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} = 0. \quad \text{|| gle Polare}$$

Ist x', y' der Mittelpunkt des Kegelschnittes, so heisst die Gleichung der Berührungssehne

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} = 0;$$

dies ist die unendlich ferne gerade Linie, welche den Kegelschnitt in den unendlich fernen Punkten trifft. Hieraus folgt schon Aufg. 498. Man kann dies auch so beweisen: der

Punkt x', y' liege auf dem Kegelschnitt; man setze $x' = \varrho \cos \varphi$, $y' = \varrho \sin \varphi$, nehme ϱ unendlich gross an, so ist die Gleichung der Tangente

$$a_{11}x \cos \varphi + a_{12}(y \cos \varphi + x \sin \varphi) + a_{22}y \sin \varphi + a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi = 0.$$

Diese gerade Linie geht durch den Mittelpunkt der Kurve. Da die Asymptoten der geraden Linie $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ parallel sind, so hat nur die Hyperbel ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$) reelle Asymptoten.

Soll $mx + ny - 1 = 0$ eine Tangente an dem Kegelschnitt sein, so müssen die Gleichungen

$$m(a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}) + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13} = 0,$$

$$n(a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}) + a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23} = 0,$$

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33} = 0$$

bestehen, woraus man die Bedingung $\varphi(m, n) = 0$ erhält (siehe Aufg. 565 etc.).

Die Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel. Die Verbindungsline der Berührungspunkte paralleler Tangenten ist ein Durchmesser. Die Tangenten in den Endpunkten der Axen stehen senkrecht aufeinander.

502—510. Diese Sätze beweist man ebenso wie die Sätze 326—332, 348, 349, wenn man statt „Kreis“ einen „Kegelschnitt“ setzt.

511. Betrachtet man die fünf gegebenen Punkte als Eckpunkte eines eingeschriebenen Sechsecks, so liegen die Durchschnittspunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten in einer geraden Linie. Diese geht also durch den Durchschnittspunkt a der Gegenseiten 12 und 45, ihre sonstige Lage aber ist noch unbestimmt, weil der sechste Eckpunkt nicht gegeben ist; demnach kann man annehmen, sie falle mit der durch a beliebig gezogenen geraden Linie G zusammen. Die gerade Linie G wird durch die gerade Linie 23 in dem Punkte b und durch die gerade Linie 34 in dem Punkte c durchschnitten; somit muss sowohl die gerade Linie $b5$, als auch die gerade Linie $c1$ durch den Punkt 6 gehen. Um weitere Punkte des Kegelschnitts zu erhalten, braucht man durch a eine andere

gerade Linie zu ziehen, oder die fünf gegebenen Punkte in anderer Ordnung zu numerieren.

512, 513. Ist die Gleichung des Kegelschnitts die in Aufg. 464, so ist die Gleichung der Polare des Punktes x', y' in Bezug auf den Kegelschnitt

$$x(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}) + y(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}) + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Nach Aufg. 103 sind die Koordinaten u', v' der Polare gegeben durch

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13} &= u'(a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}), \\ a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23} &= v'(a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}). \end{aligned}$$

Liegt der Punkt x', y' auf dem Kegelschnitt, so sind u', v' die Koordinaten der Tangente im Punkte x', y' . Will man umgekehrt die Koordinaten des Punktes x, y des Kegelschnittes durch die Koordinaten der Tangente in x, y ausdrücken, so hat man die Gleichungen nach x, y aufzulösen. Hieraus folgt, dass die Gleichung von der Form

$$b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2 + 2b_{13}u + 2b_{23}v + b_{33} = 0$$

einen Kegelschnitt darstellt; hier sind u, v die Koordinaten einer Tangente des Kegelschnitts. Aus der Gleichung folgt, dass durch fünf Tangenten der Kegelschnitt im allgemeinen bestimmt ist. Gehen von den fünf Tangenten des Kegelschnitts drei durch einen Punkt, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei Punkte, von welchen der eine der genannte Punkt ist, der andere der Schnittpunkt der beiden übrigen Tangenten.

514. Man bestimme die Berührungspunkte der Tangenten und löse dann die Aufg. 511. Um aber aus den fünf Tangenten a, b, c, d, e den Berührungspunkt P einer unter ihnen (a) zu ermitteln, lässt man die sechste Tangente f mit a zusammenfallen und bestimmt ihren Schnittpunkt P mit derselben, d. h. man zieht die gerade Linie (ab, de) und schneidet sie mit $(bc, ef [ea])$ in M , zieht dann (cd, M) und erhält P auf a (f) da, wo diese sie schneidet.

515—522. Diese Sätze folgen aus 502—508, 196, 197.

523, 524. Die Polare des Punktes x_1, y_1 in Bezug auf den Kegelschnitt Aufg. 464 ist

$$x(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}) + y(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}) + a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33} = 0.$$

Die Koordinaten der Polaren sind

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} &= u(a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33}), \\ a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} &= v(a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33}). \end{aligned}$$

Bewegt sich x_1, y_1 auf dem Kegelschnitte

$a'_{11}x_1^2 + 2a'_{12}x_1y_1 + a'_{22}y_1^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a'_{33} = 0 = \varphi$,
so erhält man den Ort der Polaren u, v dadurch, dass man x_1, y_1 durch u, v bestimmt und in die Gleichung $\varphi = 0$ einsetzt; diese Gleichung ist die Gleichung eines Kegelschnittes in Linienkoordinaten.

525—530. Die Gleichung des Kegelschnittes sei die in Aufg. 464. Man verschiebe das Koordinatensystem parallel, so dass O der Koordinatenursprung ist, die Gleichung des Kegelschnitts ist dann

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0.$$

Ist ϑ der Winkel, den OR mit der Axe der x bildet, so sind OR', OR'' die Wurzeln ϱ der Gleichung

$$\begin{aligned} (a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta) \varrho^2 \\ + 2(a'_{13} \cos \vartheta + a'_{23} \sin \vartheta) \varrho + a'_{33} = 0, \end{aligned}$$

also ist

$$OR' \cdot OR'' = \frac{a'_{33}}{a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta}.$$

Ebenso ist

$$O_1R'_1 \cdot O_1R''_1 = \frac{a''_{33}}{a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta}.$$

Es ist also $OR' \cdot OR'' : O_1R'_1 \cdot O_1R''_1 = a'_{33} : a''_{33}$, mithin von ϑ unabhängig.

Der Satz 526 heisst: Die Rechtecke aus den Abschnitten zweier sich schneidender Sehnen verhalten sich zueinander, wie die Quadrate der zu diesen Sehnen parallelen Durchmesser.

Der Satz 527 heisst: Die Längen von zwei durch einen Punkt gezogenen Tangenten verhalten sich zueinander, wie die Längen der Durchmesser, zu denen sie parallel sind.

Der Satz 528 heisst: Die Quadrate der Ordinaten eines Durchmessers sind den Rechtecken aus den Segmenten proportional, welche sie im Durchmesser bestimmen.

531. Ist der Punkt (3, 2) Koordinatenursprung, so ist die Gleichung des Kegelschnitts

$$x^2 - 8xy + y^2 - 5x - 13y = 0.$$

Die Gleichung der Tangente in Bezug auf die alten Koordinaten ist $5x + 13y = 41$ und in Bezug auf die neuen Koordinaten ist $5x + 13y = 0$.

532. Die gerade Linie $y = -3 + \sqrt{7}$ schneidet den Kegelschnitt in den Punkten

$$x = -\frac{29}{2} + 4\sqrt{7} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1285 - 468\sqrt{7}}.$$

Die Gleichungen der Sehnen sind:

$$\frac{x-3}{y-2} = \frac{35 - 8\sqrt{7} - \sqrt{1285 - 468\sqrt{7}}}{10 - 2\sqrt{7}},$$

$$\frac{x-3}{y-2} = \frac{35 - 8\sqrt{7} + \sqrt{1285 - 468\sqrt{7}}}{10 - 2\sqrt{7}}.$$

Die Quadrate der Längen der Sehnen erhält man aus dem Ausdruck:

$$\frac{1}{4} \left(35 - 8\sqrt{7} \pm \sqrt{1285 - 468\sqrt{7}} \right)^2 + (5 - \sqrt{7})^2.$$

Die Pole der Sehnen erhält man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 5x + 13y &= 41, \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{1285 - 468\sqrt{7}} x + \left(\frac{117}{2} - 15\sqrt{7} \mp 2\sqrt{1285 - 468\sqrt{7}} \right) y \\ &= \frac{154}{4} - \frac{27\sqrt{7}}{2} \mp \frac{5}{4} \sqrt{1285 - 468\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

533. Der Mittelpunkt ist $\left(\frac{5}{11}, \frac{19}{22}\right)$; die Gleichung der Tangente im Punkte (1, 2) ist $10x + 9y = 28$, welcher der Durchmesser $10x + 9y = \frac{271}{22}$ parallel läuft.

Die Gleichungen der Axen sind:

$$\begin{aligned} 44x + 22y(1 - \sqrt{5}) &= 39 - 19\sqrt{5}, \\ 11x(1 - \sqrt{5}) - 22y + 14 + 5\sqrt{5} &= 0. \end{aligned}$$

534. Der Berührungspunkt ist $(1, 1)$, der Mittelpunkt ist $(\frac{1}{4}, -1)$. Die Asymptoten sind imaginär; die Gleichungen der Axen sind:

$$4x + y(1 - \sqrt{17}) = \sqrt{17}, \quad 4x + y(1 + \sqrt{17}) + \sqrt{17} = 0.$$

535. Die gerade Linie $x = 1$ ist Tangente im Punkte $(1, 0)$; dieser Tangente ist der Durchmesser $x = 0$ parallel, welchem der Durchmesser $y = 0$ konjugiert ist.

$$\mathbf{536.} \quad 1) \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 \right)^2.$$

$$2) \left(\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 \right)^2.$$

$$3) (y'^2 - mx') (y^2 - mx) = \left(y' - \frac{m}{2} [x + x'] \right)^2.$$

$$4) (x'y' - n^2) (xy - n^2) = \left(\frac{1}{2} [x'y + y'x] - n^2 \right).$$

$$5) (x'^2 - y'^2 - 1) (x^2 - y^2 - 1) = (xx' - yy' - 1).$$

537. Die Polare des Punktes $(2, \frac{14}{5})$ ist $13x - 3y = 10$.

Der Mittelpunkt ist $(-1, \frac{1}{4})$; die Gleichungen der Axen sind

$4y + x(1 - \sqrt{17}) = \sqrt{17}$, $4y + x(1 + \sqrt{17}) + \sqrt{17} = 0$; die Gleichungen der Tangenten sind $9x - 5y = 4$, $31x + 25y = 132$.

538. Der Mittelpunkt ist $(\frac{19}{22}, \frac{5}{11})$; die Gleichungen der konjugierten Durchmesser sind $275y + 627x = 666\frac{1}{2}$, $78x + 470y = 281$; die Gleichung der beiden Tangenten ist $69(3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3) = 20(57x + 25y - 139)^2$; die eine Tangente hat die Gleichung $10y + 9x = 28$.

539. Der Punkt liegt auf dem Kegelschnitt; die Gleichung der Tangente ist $3x + 55 = 58y$.

$$\mathbf{540.} \quad 99x + 7y = 55.$$

541. Die Polaren sind resp. $5x + 166y = 32$, $135x + 12y = 32$. Die Axen der Kurve 539 sind den beiden geraden Linien $x^2 - 52xy - y^2 = 0$ parallel und die Axen der Kurve 540 sind den beiden geraden Linien $x^2 + 52xy - y^2 = 0$ parallel.

542. Die Polaren sind:

$$1) \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1; \quad 2) \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1; \quad 3) 2yy' = p(x + x').$$

Die Axen sind:

$$1) x = 0, y = 0; \quad 2) x = 0, y = 0; \quad 3) y = 0.$$

Die konjugierten Durchmesser zu $mx + ny = 0$ sind:

$$1) \frac{nx}{a^2} - \frac{my}{b^2} = 0, \quad 2) \frac{nx}{a^2} + \frac{my}{b^2} = 0.$$

Der Winkel, den die gerade Linie $mx + ny = 0$ mit der Axe der x bildet, ist bestimmt durch $\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{m}{n}$; schliessen die zu dem Durchmesser $mx + ny = 0$ konjugierten Durchmesser mit der Axe der x den Winkel ϑ' ein, so ist:

$$1) \operatorname{tg} \vartheta \cdot \operatorname{tg} \vartheta' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad 2) \operatorname{tg} \vartheta \cdot \operatorname{tg} \vartheta' = \frac{b^2}{a^2}.$$

$$\mathbf{543.} \quad 1) \quad x = \frac{a^2(y' - y'')}{y'x'' - x'y''}, \quad y = \frac{b^2(x'' - x')}{y'x'' - x'y''};$$

$$2) \quad x = \frac{a^2(y' - y'')}{y'x''}, \quad y = \frac{b^2(x' - x'')}{y'x'' - x'y''};$$

$$3) \quad x = \frac{x'y'' - y'x''}{y' - y''}, \quad y = \frac{p}{2} \frac{x' - x''}{y' - y''}.$$

Das Einsetzen der betr. Werte ist sehr leicht.

544. Sind die fünf Punkte des Kegelschnittes 1 2 3 4 5, so ziehe man 1 6 parallel zu 2 3 und bestimme den auf 1 6 gelegenen Punkt 6 des Kegelschnittes; es sind dann 1 6 und 2 3 parallele Sehnen und die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ist ein Durchmesser; zieht man 5 7 parallel 3 4 und bestimmt den Punkt 7 auf dem Kegelschnitt, so findet man einen zweiten Durchmesser und damit den Mittelpunkt des Kegelschnittes.

545, 546. Das Sechseck $ABCDEF$ ist ein Pascalsches Sechseck, also auch das Sechseck AF, FE, ED, DC, CB, BA ; sind F', E' zwei den F und E nach der Konstruktion entsprechende Punkte auf AF, DF , so sind auch die Sechsecke

AF' , $F'E'$, $E'D$, DC , CB , BA und AF' , FE , $E'D$, DC , CB , BA Pascalsche Sechsecke. Diese Sechsecke haben dieselbe Pascalsche Gerade, mithin schneiden sich FE , $F'E'$ auf der geraden Linie CB . Vertauscht man hier A mit D , oder B mit C , oder in beliebiger Folge die Paare EF mit BC , so erhält man den Satz: Wenn drei Kegelschnitte durch dieselben zwei Punkte (A , D) gehen, so schneiden sich ihre drei gemeinschaftlichen Sehnen, welche keinen dieser Punkte enthalten, in einem Punkte.

547. In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecke liegen die Durchschnittspunkte von zwei Paaren nicht aufeinander folgender Seiten mit demjenigen dritten Punkte in einer geraden Linie, in welchem die fünfte Seite von der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunktes geschnitten wird.

In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecke liegen die Durchschnittspunkte der Gegenseiten mit demjenigen der Tangenten in irgend zwei gegenüberliegenden Eckpunkten in einer geraden Linie.

In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke liegen die drei Punkte, in welchen jede der drei Seiten von der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunktes geschnitten wird, in einer geraden Linie.

In jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Fünfecke gehen die geraden Verbindungslinien von zwei Paaren nicht aufeinander folgender Ecken und die durch den fünften Eckpunkt und den Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite gezogenen geraden Linie durch einen Punkt.

In jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Vierecke gehen die geraden Verbindungslinien der Gegenecken und die Verbindungsgerade der Berührungspunkte von irgend zwei Gegenseiten durch einen Punkt.

In jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecke gehen die drei geraden Linien, welche die Eckpunkte mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, in einem Punkte.

548, 549. Siehe 332, 348, 349, 502—522.

550, 551. Es ist

$$lu = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \quad lv = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}, \\ lw = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}.$$

Berechnet man x, y , setzt diese Werte in die Gleichung 464, so erhält man in u, v, w die Gleichung 551 und es ist, wenn man für x, y homogene Koordinaten x, y, z einsetzt:

$$A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w = x, \quad A_{12}u + A_{22}v + A_{23}w = y, \\ A_{13}u + A_{23}v + A_{33}w = z.$$

Die Grössen A siehe Aufg. 623.

552. Ist die Gleichung des Kegelschnittes $F(u, v, w) = 0$, so ist die Gleichung des Tangentenpaares in homogenen Koordinaten

$$F(bz - cy, cx - az, ay - bx) = 0.$$

553, 554. Die Gleichung des Poles ist:

$$u(A_{11}u_0 + A_{12}v_0 + A_{13}w_0) + v(A_{12}u_0 + A_{22}v_0 + A_{23}w_0) \\ + (A_{13}u_0 + A_{23}v_0 + A_{33}w_0) = 0, \\ \{x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) + y(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0) \\ + z(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0)\}.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung des Mittelpunktes $A_{13}u + A_{23}v + A_{33}w = 0$ ist.

555. $7u + v - 17w = 0$. **556.** $(1, 1, 1)$.

557. $-1\frac{1}{2}u + 29v - 27\frac{1}{2}w = 0$.

558, 559. $u = \frac{v''w' - w''v'}{a^2}, \quad v = \frac{w''u' - u''w'}{a^2 - e^2}, \quad w = v''u' - u''v';$
 $u = u'v'' - v'u'', \quad v = \frac{u'w'' - w'u''}{p}, \quad w = v'w'' - w'v''.$

560–564. Die allgemeinen Transformationsformeln in Punktkoordinaten sind:

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha + a, \quad y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha + b.$$

Die Gleichung einer durch ihre Koordinaten u, v gegebenen geraden Linie $ux + vy + 1 = 0$ nimmt durch diese Substitutionen die Gestalt an:

$$UX + VY + 1 = 0,$$

indem man hat:

$$U = \frac{u \cos \alpha + v \sin \alpha}{au + bv + 1}, \quad V = \frac{u \sin \alpha + v \cos \alpha}{au + bv + 1}.$$

Diese U, V betrachtet man in dem neuen Koordinatensysteme als Linienkoordinaten, wie die u, v in dem alten Koordinatensysteme. Sind die neuen Axen den alten Axen parallel, so ist:

$$U = \frac{u}{1 + au + bv}, \quad V = \frac{v}{1 + au + bv},$$

$$u = \frac{U}{1 - aV - bV}, \quad v = \frac{V}{1 - aU - bV}.$$

Haben beide Systeme denselben Anfangspunkt, so ist:

$$u = U \cos \alpha - V \sin \alpha, \quad v = U \sin \alpha + V \cos \alpha.$$

Die Aufg. 561 erhält man also aus Aufg. 473 durch Vertauschen der Punktkoordinaten mit Linienkoordinaten.

Verschiebt man die Koordinatenaxen parallel, so dass der Mittelpunkt des Kegelschnittes Aufg. 551 der Ursprung ist, so hat man in homogenen Koordinaten als Gleichung des Mittelpunktes in Bezug auf das alte Koordinatensystem

$$A_{13}u + A_{23}v + A_{33}w = 0;$$

und die homogenen Koordinaten des Mittelpunktes sind: A_{13}, A_{23}, A_{33} . Ist $A_{33} = 0$, so ist der Kegelschnitt eine Parabel. Die Gleichungen der Aufg. 555, 556, 557, 559 stellen resp. Hyperbel, Ellipse, Ellipse und Parabel dar.

565.—614. In diesen Aufgaben sei die Gleichung des zu bestimmenden Kegelschnittes

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Ist (a, b) der Mittelpunkt des Kegelschnittes, so ist:

$$a_{11}a + a_{12}b + a_{13} = 0, \quad a_{12}a + a_{22}b + a_{23} = 0.$$

Wenn also der Mittelpunkt des Kegelschnittes gegeben ist, so hat man zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten der Kegelschnittgleichung zwei Relationen. Ebenso liefert eine Asymptote, eine Tangente mit Berührungspunkt, zwei Durchmesser zwei Bestimmungsgleichungen. Soll die gerade Linie $mx + ny + h = 0$ den durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ dargestellten Kegelschnitt berühren, so hat man die Relation:

$$0 = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)m^2 + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)n^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)h^2 \\ + 2(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})nh + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})mh \\ + 2(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})mn = \varphi(m, n, h).$$

Ist die gerade Linie $px + qy = r$ parallel einer Asymptote, so ist

$$a_{11}q^2 - 2a_{12}pq + a_{22}p^2 = 0.$$

Fällt diese gerade Linie mit der Asymptote zusammen, so muss sein:

$$(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})p + (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})q = r(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}).$$

Die gerade Linie $x - sy = t$ ist ein Durchmesser, wenn ist:

$$t = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} - s \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}.$$

Die Gleichung einer geraden Linie, welche dem zu dem Durchmesser $x - sy = t$ konjugierten Durchmesser parallel ist, ist:

$$s(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = c.$$

Diese gerade Linie fällt mit einer gegebenen geraden Linie $kx + ly + 1 = 0$ zusammen, wenn ist:

$$k(sa_{13} + a_{23} - c) = sa_{11} + a_{12}, \quad l(sa_{13} + a_{23} - c) = sa_{12} + a_{22}.$$

Sind die beiden geraden Linien

$$Ax + By + C = 0, \quad Bx - Ay + C_1 = 0$$

den Axen des Kegelschnittes parallel, so besteht die Gleichung

$$a_{12}(A^2 - B^2) + (a_{11} - a_{22})AB = 0.$$

Fallen diese beiden geraden Linien mit den Axen zusammen, so ist:

$$-C = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}A + \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}B,$$

$$C_1 = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}A - \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}B.$$

Mit Hilfe dieser Angaben sind sämtliche Aufg. 565—614 zu lösen.

In der Aufg. 577 seien die Koordinaten des gegebenen Punktes x_1, y_1 und die Gleichungen der Asymptoten:

$$px - qy = r, \quad p_1x - q_1y = r_1.$$

Man hat die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \quad f(x_1, y_1) = 0, \\ a_{11}q^2 + 2a_{12}pq + a_{22}p^2 &= 0, \quad ap - bq = r, \\ a_{11}q_1^2 + 2a_{12}p_1q_1 + a_{22}p_1^2 &= 0, \quad ap_1 - bq_1 = r_1, \end{aligned}$$

wenn a, b die Koordinaten des Mittelpunktes sind. Nimmt man den Mittelpunkt zum Koordinatenursprung, so ist $r = r_1 = a = b = 0$; man kann setzen: $a_{13} = a_{23} = 0$. Die Gleichung des Kegelschnittes ist

$$\begin{vmatrix} x^2 & yx & y^2 & 1 \\ x_1^2 & y_1x_1 & y_1^2 & 1 \\ q^2 & pq & p^2 & 0 \\ q_1^2 & p_1q_1 & p_1^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Aufg. 610, 611, 612 sind unbestimmt; denn für einen beliebigen Wert von C genügen die Gleichungen

- 1) $xy(Cy_1^2 + 1) = x_1y_1(Cy^2 + 1);$
- 2) $2Cxy + \frac{C^2 + 2Cmn}{m^2}y^2 + 1 = 0;$
- 3) $xy = C,$

bez. den Aufg. 610, 611, 612. Alle diese Kegelschnitte haben die Asymptote $y = 0$ und denselben Mittelpunkt $(0, 0)$; ferner geht der erste Kegelschnitt durch den Punkt x_1, y_1 ; der zweite Kegelschnitt hat die Tangente $mx + ny + 1 = 0$ und der dritte Kegelschnitt hat die Asymptote $x = 0$.

615. Bilden die beiden Sehnen mit der Axe der x resp. die Winkel ϑ, ϑ' , so ist $a_{22} \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta' + a_{12} (\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg} \vartheta') + a_{11} = 0$. Setzt man also in den Aufg. 565–610 statt „der Koordinaten eines Punktes“ oder „der Gleichung einer Tangente“ oder „der Gleichung einer geraden Linie parallel eine Asymptote“ die „Gleichungen von zwei geraden Linien, welche zwei konjugierten Durchmessern parallel sind“, so erhält man eindeutig bestimmte Kegelschnitte.

616. In Aufg. 348 wurde mittelst der Polaren gezeigt, das $a(bcdf) = e(bcdf)$ ist, wenn diese Punkte auf einem Kegelschnitte liegen; aus dieser Beziehung wurden dann die Sätze von Pascal und Brianchon bewiesen. Sind umgekehrt

sechs Punkte gegeben, dass $a(bcdf) = e(bcdf)$ ist, so liegen diese auf einem und demselben Kegelschnitte. Durch diesen leicht zu beweisenden Satz sind die Aufgaben auf die Sätze 189—225 zurückgeführt. Die konstruktive Lösung der Aufg. 565—614 ist eine Aufgabe der sogenannten „Geometrie der Lage“ und der „darstellenden Geometrie“.

617. Durch Einführung der Linienkoordinaten werden in Aufg. 565—614 „die Koordinaten eines Punktes“ zu der „Gleichung eines Punktes“ und die „Gleichung einer geraden Linie (Tangente, Asymptote)“ zu „Koordinaten einer geraden Linie (Tangente, Asymptote)“.

618. Die Gleichung der Polare des Punktes x', y' ist

$$x(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}) + y(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}) + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Liegt der Pol in der Axe der x (y), so ist $y' = 0$ ($x' = 0$), und ist die Polare die Axe der y (x), so muss sein $a_{12}x' + a_{23} = 0$, $a_{13}x' + a_{33} = 0$ ($a_{12}y' + a_{13} = 0$, $a_{23}y' + a_{33} = 0$); also ist $a_{12}a_{33} = a_{13}a_{23}$.

619. Die Asymptoten sind den beiden geraden Linien $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ parallel; setzt man für x, y die Koordinaten des Mittelpunktes, so findet man die gesuchte Bedingung: $a_{11}a_{23}^2 - 2a_{13}a_{12}a_{23} + a_{22}a_{13}^2 = 0$.

620. Für $a_{13}^2 = a_{11}a_{33}$ ist die Axe der x Tangente an dem gegebenen Kegelschnitt. Die gegebene Tangente schneide die Axe der x im Punkte $(a, 0)$; macht man diesen Punkt zum Ursprung der Koordinaten, so ist die Gleichung des Kegelschnittes:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(a_{11}a + a_{13})x + 2(a_{12}a + a_{23})y + a'_{33} = 0 = f(x, y),$$

$$a_{11}a'_{33} = (a_{11}a + a_{13})^2, \quad a'_{13} = a_{11}a + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{12}a + a_{23}.$$

Die Gleichung der Tangenten durch den neuen Ursprung ist

$$2(a'_{33}a_{12} - a'_{13}a'_{23})xy + (a_{22}a'_{33} - a'_{23}^2)y^2 = 0.$$

Haben die Punkte A, B resp. die Koordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2$, so bestehen die Gleichungen

$$px_1 + qy_1 = 0, \quad px_2 + qy_2 = 0, \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = c, \\ p = a'_{33}a_{12} - a'_{13}a'_{23}, \quad q = a_{22}a'_{31} - a'_{23}^2.$$

Zieht man von A, B die anderen Tangenten an den Kegelschnitt, welche sich im Punkte x, y schneiden, so ist

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y) \cdot f(x_1, y_1) \\ &- \{x(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a'_{13}) + y(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a'_{23}) + a'_{13}x_1 + a'_{23}y_1 + a'_{33}\}^2, \\ 0 &= f(x, y) f(x_2, y_2) \\ &- \{x(a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a'_{13}) + y(a_{12}x_2 + a_{22}y_2 + a'_{23}) + a'_{13}x_2 + a'_{23}y_2 + a'_{33}\}^2. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man für den Ort des Durchschnittspunktes (x, y) der Tangenten von A und B einen Kegelschnitt.

621, 622. Die Gleichung des Kegelschnittes sei:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Man setze:

$$\begin{aligned} -\frac{2a_{13}}{a_{11}} &= l + l_1, & \frac{2a_{23}}{a_{22}} &= -(m + m_1), \\ \frac{a_{33}}{a_{11}} &= ll_1, & \frac{a_{33}}{a_{22}} &= mm_1, \end{aligned}$$

dann ist die Gleichung des Kegelschnittes:

$$mm_1x^2 + 2a'_{12}xy + ll_1y^2 - mm_1(l + l_1)x - ll_1(m + m_1)y + ll_1mm_1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher in den Koordinatenachsen die Abschnitte l, l_1, m, m_1 bildet. Der Mittelpunkt dieses Kegelschnittes ist durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2mm_1x + 2a'_{12}y - mm_1(l + l_1) &= 0, \\ 2ll_1y + 2a'_{12}x - ll_1(m + m_1) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Eliminiert man a'_{12} , so ist der Ort des Mittelpunktes

$$2mm_1x^2 - 2ll_1y^2 - mm_1(l + l_1)x + ll_1(m + m_1)y = 0$$

ein Kegelschnitt. Sind statt der vier Punkte $(l, o), (l_1, o), (o, m), (o, m_1)$ die vier Punkte $(l, n), (l_1, n_1), (p, m), (p_1, m_1)$, so erhält man als Gleichung des Ortes:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & x, & y, & 0, & 1, & 0 \\ l^2, & 2ln, & n^2, & l, & n, & 1 \\ l_1^2, & 2l_1n_1, & n_1^2, & l_1, & n_1, & 1 \\ p^2, & 2mp, & m^2, & p, & m, & 1 \\ p_1^2, & 2m_1p_1, & m_1^2, & p_1, & m_1, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0 = f(u, v)$$

gegeben, so sind die Koordinaten des Mittelpunktes $\frac{A_{13}}{A_{33}}, \frac{A_{23}}{A_{33}}$.

Sind vier Tangenten bestimmt, so bestehen die Gleichungen:

$$f(u_1, v_1) = 0, f(u_2, v_2) = 0, f(u_3, v_3) = 0, f(u_4, v_4) = 0,$$

$$x = \frac{A_{13}}{A_{33}}, y = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

Hieraus folgt, dass der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Tangenten eine gerade Linie ist.

623. Ist M der Mittelpunkt des Kegelschnittes, so ist $MA^2 + MA'^2$ konstant; die Tangenten in A und A' stehen aufeinander senkrecht. Die Gleichung des Kegelschnittes sei in Punktkoordinaten:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

in Linienkoordinaten:

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0 = f(u, v).$$

Es ist:

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \quad A_{22} = a_{33}a_{11} - a_{13}^2, \quad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \\ A_{23} = a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}, \quad A_{13} = a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13}, \quad A_{21} = a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12}.$$

Verschiebt man das Koordinatensystem nach dem Mittelpunkt ξ, η , so heisst die Gleichung des Kegelschnittes:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33} = 0, \quad \begin{matrix} a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13} = 0, \\ a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23} = 0. \end{matrix}$$

Dreht man das System um den Winkel α , so dass ist:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \text{ so ist die Gleichung des Kegelschnittes:}$$

$$lx^2 + l_1y^2 + a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33} = 0,$$

$$l + l_1 = a_{11} + a_{22}, \quad ll_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Die Koordinatenachsen sind ein Paar konjugierter Durchmesser, also die Axen.

Es ist:

$$MA^2 = x^2 = -\frac{a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}}{l}, \quad MA'^2 = y^2 = -\frac{a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}}{l_1},$$

also:

$$MA^2 + MA'^2 = - \frac{a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (a_{11} + a_{22}) = + c$$

$$= - \frac{A_{11} + A_{22} - A_{13}\xi - A_{23}\eta}{A_{33}}.$$

Berühren den Kegelschnitt die drei Tangenten (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) , so gelten die Gleichungen

$$f(u_1, v_1) = 0, f(u_2, v_2) = 0, f(u_3, v_3) = 0,$$

$$A_{13}\xi + A_{23}\eta - A_{11} - A_{22} - cA_{33} = 0, A_{13} - \xi A_{33} = 0,$$

$$A_{23} - \eta A_{33} = 0.$$

Hieraus folgt als Gleichung des Orts

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & -\xi \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & -\eta \\ -1, & 0, & -1, & \xi, & \eta, & -c \\ u_1^2, & 2u_1v_1, & v_1^2, & 2u_1, & 2v_1, & 1 \\ u_2^2, & 2u_2v_2, & v_2^2, & 2u_2, & 2v_2, & 1 \\ u_3^2, & 2u_3v_3, & v_3^2, & 2u_3, & 2v_3, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$P(\xi^2 + \eta^2) + Q\xi + R\eta = S$$

ein Kreis.

624—630. Die Aufg. 630 ist ein spezieller Fall der Aufg. 175.

In Aufg. 626 schneiden sich die Linien AB in dem Punkte (m, n) . Hat der Punkt A' (B') die Koordinaten x', y' , der Punkt P die Koordinaten x, y , der Punkt A die Koordinaten x_1, y_1 und der Punkt B die Koordinaten x_2, y_2 , so ist

$$(x + x')(x_1 + x_2) - 2xx' = 2x_1x_2,$$

$$(y + y')(y_1 + y_2) - 2yy' = 2y_1y_2,$$

$$\frac{x_1 - m}{y_1 - n} = \frac{x_2 - m}{y_2 - n} = \frac{x'_1 - m}{y'_1 - n} = \frac{x - m}{y - n}.$$

Liegt der Punkt (m, n) unendlich fern, so kann man annehmen, dass $y_1 = y_2 = y' = y$ ist, und unter Voraussetzung schiefwinkliger Koordinaten kann man der Gleichung des Kegelschnitts K die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

geben. Es ist

$$x_1 + x_2 = -\frac{C}{A}, \quad 2x_1x_2 = \frac{2By^2 + 2Dy + 2E}{A}.$$

Der Ort des Punktes P hat also die Gleichung

$$2By^2 + 2Dy + 2E + (x + x')C + 2Axx' = 0.$$

Beschreibt x' eine gerade Linie, so ist der Ort von P ein Kegelschnitt.

Der Ort der Aufg. 626, 627 ist also ein Paar Kegelschnitte.

Sind in diesem Falle die Kegelschnitte K, K' Parabeln $By^2 + Cx + Dy + E = 0, B'y^2 + C'x + D'y + E' = 0$, so beschreibt der Punkt P auch eine Parabel.

Ist der Punkt (m, n) der Koordinatenursprung, so ist die Gleichung des Ortes von P

$$(x + x')(Cx + yD) + 2x'(Ax^2 + By^2) + 2Ex = 0.$$

Beschreibt x' eine gerade Linie parallel der Axe der y , so ist der Ort von P ein Kegelschnitt.

631. Die gerade Linie sei die Axe der x , die Länge der gleichen Sehnen sei $2a$ und der gegebene Punkt habe die Koordinaten $0, b$; es ist die Gleichung des Ortes $x^2 - 2yb = a^2 - b^2$ eine Parabel.

632. Die Tangenten von B an den Kegelschnitt berühren denselben in den Punkten B_1, B_2 ; bewegt sich B auf einer geraden Linie L , so gehen die geraden Linien B_1, B_2 durch den Pol P der geraden Linie L in Bezug auf den Kegelschnitt. Der Punkt P ist bestimmt. Die Gleichung des Kegelschnitts auf den Mittelpunkt M ist in rechtwinkligen Koordinaten

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

Die gerade Linie MP bilde mit der Axe der x den Winkel ϑ und der zu MP konjugierte Durchmesser bilde mit der Axe der x den Winkel ϑ' ; es ist $a_{22} \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta' + a_{12} (\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg} \vartheta') + a_{11} = 0$. Nimmt man diese Durchmesser zu Koordinatenachsen, so ist $x = x' \cos \vartheta + y' \cos \vartheta', y = x' \sin \vartheta + y' \sin \vartheta'$; die Gleichung des Kegelschnitts hat dann die Form

$$ax^2 + by^2 + c = 0.$$

Der Punkt P hat die Koordinaten $m, 0$ und die Gleichung der Linie L ist $amx + c = 0$. Ist der gegebene Kegelschnitt ein Kreis, so ist $a_{12} = 0, a_{22} = a_{11}$ und $\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta'}$, d. h. beim Kreis stehen die konjugierten Durchmesser senkrecht.

Die Gleichungen von BA , BC sind:

$$ax_1x + by_1y + c = 0, \quad ax_2x + by_2y + c = 0,$$

wenn man setzt:

$$x_1 + x_2 = \frac{mb}{az^2 + b}, \quad x_1x_2 = \frac{(c + bm^2)z^2}{az^2 + b},$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{2amz}{az^2 + b}, \quad y_1y_2 = \frac{am^2 + c}{az^2 + b}.$$

Ist die Gleichung der geraden Linie $AC: px + qy + 1 = 0$, so ist nach der Aufgabe

$$(ax_1q - by_1p) \sin \omega = n (apx_1 + bqy_1 - [ax_1q + by_1p] \cos \omega).$$

Da die gerade Linie AC Tangente des Kegelschnittes ist, so ist:

$$bcp^2 + acq^2 + ab = 0.$$

Der Schnittpunkt C hat die Koordinaten:

$$x = \frac{by_2 - cq}{aqx_2 - bpy_2}, \quad y = \frac{cp - ax_2}{aqx_2 - bpy_2}.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen $x_1, y_1, x_2, y_2, p, q, z$, so erhält man die Gleichung des Ortes von C .

Ist $a = b = -c = -r^2$, so ist der Kegelschnitt ein Kreis. Nimmt man den Punkt M als Pol und die gerade Linie MP als Axe von Polarkoordinaten. Ist der Winkel BAC gleich 2γ , so ist $\sphericalangle CMB = 1R - \gamma = \alpha$. Wenn die Koordinaten von C, B gleich $\varrho, \vartheta, \varrho', \vartheta'$ gesetzt werden, so ist:

$$\varrho' \cos \vartheta' = l, \quad \vartheta + \vartheta' = \alpha, \quad r = \frac{\varrho \varrho' \sin \alpha}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho \varrho' \cos \alpha}}.$$

Die Gleichung des Ortes ist daher:

$$r^2 (\varrho^2 \cos^2 (\alpha - \vartheta) + l^2 - 2l\varrho \cos \alpha \cos (\alpha - \vartheta)) = l^2 \varrho^2 \sin^2 \alpha,$$

welche einen Kegelschnitt darstellt.

633. Der Einfachheit wegen sei der gegebene Kegelschnitt die Parabel $y^2 = 2px$, und der feste Punkt, durch welchen die gerade Linie AB geht, liege auf der Axe der x und habe die Abscisse m . Die Gleichung der geraden Linie AB hat die Form $x = m + yz$. Die Koordinaten des Punktes A sind:

$$x = m + pz^2 + z\sqrt{2pm + p^2z^2},$$

$$y = pz + \sqrt{2pm + p^2z^2}.$$

Ist der Winkel $BAC = \alpha$, so ist die Gleichung von AC :

$$x + y \frac{\operatorname{tg} \alpha - z}{1 + z \operatorname{tg} \alpha} = m + pz^2 + z \sqrt{2pm + p^2 z^2} \\ + (pz + \sqrt{2pm + p^2 z^2}) \frac{\operatorname{tg} \alpha - z}{1 + z \operatorname{tg} \alpha}.$$

Beschreibt der Punkt B den Kegelschnitt, so ändert z seinen Wert und die gerade Linie AC ist Tangente an eine bestimmte Kurve; da aber jeder Punkt einer Kurve als der Schnittpunkt von zwei aufeinander folgenden Tangenten angesehen werden kann, so ist der Punkt, den eine gerade Linie des Systems (AC) mit der Enveloppe gemein hat, der, in welchem sie die nächstfolgende Tangente der Enveloppe schneidet. Hat z. B. ein System von geraden Linien die Gleichung:

$z^2(ax + by + c) - 2z(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0 = f(z)$,
in welcher z eine unbestimmte Grösse ist, so ist die Enveloppe dieses Systems der Kegelschnitt:

$$(ax + by + c)(a_2x + b_2y + c_2) - (a_1x + b_1y + c_1)^2 = 0.$$

Die beiden Gleichungen $f(z) = 0$, $f(z + k) = 0$ bestimmen den Schnittpunkt zweier Geraden des Systems, also auch die beiden Gleichungen: $f(z) = 0$, $\frac{f(z + k) - f(z)}{k} = 0$ oder

$$z^2(ax + by + c) - 2z(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ 2[z(ax + by + c) - a_1x - b_1y - c_1] + k(ax + by + c) = 0.$$

Je kleiner k ist, desto mehr nähert sich die gerade Linie $f(z + k) = 0$ dem Zusammenfallen mit der ersten $f(z) = 0$, und für $k = 0$ findet man, dass der Schnittpunkt der ersten geraden Linie mit der nächstfolgenden geraden Linie des Systems A durch die beiden Gleichungen:

$$z^2(ax + by + c) - 2z(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ z(ax + by + c) = a_1x + b_1y + c_1$$

bestimmt ist. Eliminiert man z , so erhält man die Gleichung eines Kegelschnittes.

Wendet man diese Methode zur Bestimmung der Enveloppe von AC an, so hat man die beiden Gleichungen ($m = 0$ angenommen):

$$z^3 2p \operatorname{tg} \alpha + z(2p \operatorname{tg} \alpha + y - x \operatorname{tg} \alpha) - x - y \operatorname{tg} \alpha = 0, \\ 6p \operatorname{tg} \alpha \cdot z^2 + 2p \operatorname{tg} \alpha + y - x \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Die Gleichung der Enveloppe ist also

$$(x \operatorname{tg} \alpha - y - 2p \operatorname{tg} \alpha)(4p \operatorname{tg} \alpha + 2y - 2x \operatorname{tg} \alpha)^2 = 54p \operatorname{tg} \alpha (x + y \operatorname{tg} \alpha)^2.$$

634. Der Ort ist eine Ellipse, deren Axen die Winkel der durch den Kreismittelpunkt gehenden Parallelen zu den festen geraden Linien halbieren.

635. Der Ort ist eine Ellipse. Das Trapez sei $OMNP$; die feste gerade Linie sei $OM = a$, ferner sei $NP \parallel OM$, $NP = b$, $OP + MN = d$. OM sei die Axe von Polarkoordinaten, Q der Diagonalenschnittpunkt. Es ist $ON = \varrho \frac{a+b}{a}$,

$$d = \sqrt{ON^2 + b^2 - 2ON \cdot b \cdot \cos \varphi} + \sqrt{ON^2 + a^2 - 2ON \cdot a \cdot \cos \varphi}.$$

Die Gleichung des Ortes ist also:

$$da = \sqrt{\varrho^2 (a+b)^2 + a^2 b^2 - 2(a+b) \cdot ab \cdot \varrho \cos \varphi} \\ + \sqrt{\varrho^2 (a+b)^2 + a^4 - 2(a+b) \cdot a^2 \cdot \varrho \cos \varphi}.$$

636. Die gerade Linie $P_1 a$ treffe den gegebenen Kegelschnitt in a_1 , $a_1 c$ und $b P_1$ schneiden sich in dem Punkte b_1 des gegebenen Kegelschnittes. Bestimmt man auf dieselbe Weise die Punkte $a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, P_2, P_3, P_4$, so ist

$$a(a_1 a_2 a_3 a_4) = b(a_1 a_2 a_3 a_4), \quad a(a_1 a_2 a_3 a_4) = a(P_1 P_2 P_3 P_4), \\ b(b_1 b_2 b_3 b_4) = b(P_1 P_2 P_3 P_4), \quad b(b_1 b_2 b_3 b_4) = b(b_1 b_2 b_3 b_4).$$

Es ist aber

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = (b_1 b_2 b_3 b_4), \quad \text{also} \quad a(a_1 a_2 a_3 a_4) = a(b_1 b_2 b_3 b_4),$$

mithin $a(P_1 P_2 P_3 P_4) = b(P_1 P_2 P_3 P_4)$.

Nach Aufg. 348 ist also das Sechseck $ab P_1 P_2 P_3 P_4$ ein Pascalsches Sechseck, hieraus folgt leicht, dass die Punkte P einen durch a und b gehenden Kegelschnitt beschreiben.

637, 638. Der Pol der geraden Linie A in Bezug auf den Kegelschnitt ist der Berührungspunkt A_1 , der Pol von B in Bezug auf den Kegelschnitt ist der Berührungspunkt B_1 , die Berührungssehne $a'b'$ der Tangenten ca, cb geht durch den Pol C , von C in Bezug auf den Kegelschnitt. Der Pol P von ab in Bezug auf den Kegelschnitt ist der Schnittpunkt von $A_1 a', B_1 b'$, er beschreibt mithin nach Aufg. 636 einen durch $A_1 B_1$ gehenden Kegelschnitt. Die gerade Linie ab bewegt sich also nach Aufg. 523 als Tangente um einen die Seiten A, B berührenden Kegelschnitt.

Zieht man die Tangenten a_1b_1 , a_2b_2 , a_3b_3 , ist D der Schnittpunkt von A und B , schneiden sich ab und a_2b_2 in z , a_1b_1 und a_3b_3 in v , ab und a_1b_1 in u , a_2b_2 und a_3b_3 in w , so ist das Sechseck Db_1uxwa ein Brianchonsches Sechseck. Es ist also das Sechseck $a_1a_3b_1b_2zv$ ein Pascalsches Sechseck. Hieraus folgt $z(ba_1b_2b_3) = v(ba_1b_2a_3)$, mithin $(aa_1a_2a_3) = (bb_1b_2b_3)$. Ist $(ba_1b_2a_3) = v(ba_1b_2a_3)$, mithin $(aa_1a_2a_3) = (bb_1b_2b_3)$. Ist $(aa_1a_2a_3) = (bb_1b_2b_3)$, so umhüllen die geraden Linien ab ein und denselben Kegelschnitt. Gehen die Linien ac durch einen festen Punkt M und die Linien bc durch einen festen Punkt N , so ist

$$M(aa_1a_2a_3) = M(cc_1c_2c_3) = N(cc_1c_2c_3) = N(bb_1b_2b_3),$$

also

$$(aa_1a_2a_3) = (bb_1b_2b_3).$$

Die dritte Seite der Aufg. 638 beschreibt also einen Kegelschnitt.

Wenn man in Aufg. 636 die Punkte a_n , b_n zwei feste gerade Linien beschreiben lässt, so hat man

$$a(a_1a_2a_3a_4) = c(a_1a_2a_3a_4) = c(b_1b_2b_3b_4) = b(b_1b_2b_3b_4).$$

Hieraus folgt $a(P_1P_2P_3P_4) = b(P_1P_2P_3P_4)$, d. h. die Punkte P beschreiben einen Kegelschnitt. Mit Hilfe der Aufg. 523, 524 erhält man aus diesem Satze den Satz 638.

639. Die Koordinaten der festen Punkte seien $(c, 0)$ $(-c, 0)$. Ist die Gleichung der beweglichen geraden Linie $y - nx - m = 0$, so ist

$$m^2 = b^2 + b^2n^2 + c^2n^2 = y^2 - 2nx + n^2x^2$$

und

$$n^2(x^2 - b^2 - c^2) - 2nxy + y^2 - b^2 = 0.$$

Beachtet man die Lösung der Aufg. 633, so findet man die Gleichung der Enveloppe $\frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

640. Für dasselbe Koordinatensystem, wie in Aufg. 639, ist die Gleichung der Enveloppe $\frac{2x^2}{b^2 - 2c^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1$.

641, 642. Die Enveloppen sind Parabeln. Die Gleichung der geraden Linie der Aufg. 641 sei $y + nx - m = 0$. Die Koordinaten der festen Punkte seien $(c, 0)$, $(-c, 0)$. Es ist $n^2(b^2 - 2c^2) - nmc + b^2 = 0$, also

$$n^2(cx - [b^2 - 2c^2]) + ny - b^2 = 0.$$

Die gerade Linie hüllt also die Parabel

$$4 (cx - [b^2 - 2c^2]) b^2 = y^2$$

ein.

In der Aufg. 642 fälle man von dem Punkte O eine Senkrechte OM auf die feste gerade Linie und eine Senkrechte OM_1 auf die gerade Linie RR_1 . Es ist der Winkel $RO R_1 = \beta$ konstant; setzt man $\sphericalangle ROM = \vartheta$, so ist

$$OR = OM \sec \vartheta = r \sec \vartheta, \quad OM_1 = r \sec \vartheta \cdot \cos \beta.$$

Die Gleichung von RR_1 ist

$$\text{oder} \quad x \cos (\vartheta + \beta) + y \sin (\vartheta + \beta) = p \sec \vartheta \cdot \cos \beta$$

$$x \cos (2\vartheta + \beta) + y \sin (2\vartheta + \beta) = 2p \cos \beta - x \cos \beta - y \sin \beta.$$

Setzt man

$$\cos (2\vartheta + \beta) = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \sin (2\vartheta + \beta) = \frac{2z}{1 + z^2},$$

so erhält man die Gleichung

$$x(1 - z^2) + 2yz = (2p \cos \beta - x \cos \beta - y \sin \beta)(1 + z^2).$$

Diese gerade Linie hüllt die Parabel

$$x^2 + y^2 = (x \cos \beta + y \sin \beta - 2p \cos \beta)^2$$

ein.

643—653. Ist die Gleichung der Direktrix $x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0$, hat der Brennpunkt die Koordinaten α, β , so ist die Gleichung des Ortes

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta)^2 = (mx + ny + h)^2$$

also ein Kegelschnitt. Die Direktrix ist einer Axe des Kegelschnittes parallel und die Senkrechte vom Brennpunkt auf die Direktrix geht durch den Mittelpunkt; der Brennpunkt liegt deshalb auf der andern Axe. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nachdem $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$ ist. Der Brennpunkt ist der Pol der Direktrix.

Ist O der Mittelpunkt des Kegelschnitts, F der Brennpunkt, D der Schnittpunkt von OF mit der Direktrix, P ein Punkt des Kegelschnitts, $PR \parallel OF$, R ein Punkt der Direktrix, $OF_1 = OF$, $OD_1 = OD$, $D_1 R_1 \parallel DR$, $R_1 P \parallel OF$, $R_1 P_1 = PR$, $F_1 P_1 = FP$, so ist P_1 ein Punkt des Kegelschnittes und

$$PF^2 - e^2 PR^2 = P_1 F_1^2 - e^2 P_1 R_1^2.$$

Die gerade Linie $D_1 R_1$ und der Punkt F_1 haben in Bezug auf den Kegelschnitt dieselben Eigenschaften, wie die Direktrix DR und der Brennpunkt F . Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so liegt mit O der Punkt F_1 und die gerade Linie $D_1 R_1$ unendlich fern.

Ist die Gleichung des Kegelschnittes

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

so erhält man die Koordinaten der Brennpunkte und die Konstanten der Gleichung der Direktrix aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} la_{11} &= 1 - m^2, & la_{22} &= 1 - n^2, & la_{33} &= \alpha^2 + \beta^2 - h^2, \\ la_{12} &= -mn, & la_{13} &= -\alpha - mh, & la_{23} &= -\beta - nh. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Brennpunkte siehe Aufg. 1031.

Hieraus folgt $l^2(a_{12}^2 a_{11} a_{22}) = e^2 - 1$.

Ist die Gleichung des Kegelschnittes

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ist

$$e^2 = \frac{a^2 \mp b^2}{a^2}.$$

Setzt man nämlich $a^2 \mp b^2 = c^2$, $c^2 = e^2 a^2$, so ist die Gleichung des Kegelschnittes, wenn die Brennpunkte auf der Axe der x liegen:

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a^2}{c} \right)^2.$$

Der Kegelschnitt $y^2 = 2px$ hat den Brennpunkt $x = \frac{p}{2}$,

$y = 0$, denn man kann schreiben: $y^2 + \left(x - \frac{p}{2} \right)^2 = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2$.

Aus diesen Angaben folgt, dass die in den Aufg. 157, 158, 159 fest gegebenen Punkte die Brennpunkte der Kegelschnitte sind.

Ist die feste Linie die Axe der x , so ist die Gleichung des Kegelschnittes

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = e^2 y^2;$$

liegt der Brennpunkt auf der Axe der y , so ist die Gleichung des Kegelschnittes $x^2 + (y - y')^2 = e^2 y^2$. Dieser Kegelschnitt

hat die beiden Brennpunkte $(0, y')$, $(0, y' \frac{1+e^2}{1-e^2})$, welchen die resp. Direktrizen $y = 0$, $y = \frac{2y'}{1-e^2}$ entsprechen.

Da die Brennpunkte auf einer Axe liegen, die Gleichung des Kegelschnittes in Bezug auf die Axen aber die Form

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat, so folgt einfach der Satz 651.

Die Entfernung der Brennpunkte des Kegelschnittes $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist $c^2 = a^2 \mp b^2 = e^2 a^2$. Die Länge der Sehne durch die Brennpunkte ist $2a$.

654—657. Ist P der Pol der geraden Linie MN , so sind die geraden Linien MN , NP Tangenten des Kegelschnittes. Die Gleichung des Kegelschnittes sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 - b^2, \quad a > b.$$

Der Punkt P habe die Koordinaten x'', y'' , der Punkt M habe die Koordinaten x', y' ; $FP = \varrho$, $FM = \varrho'$; ϑ und ϑ' seien die Winkel, welche FP , FM mit der Axe der x einschliessen.

Es ist

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

die Gleichung von PM , ferner ist

$$\cos \vartheta = \frac{x'' + c}{\varrho}, \quad \sin \vartheta = \frac{y''}{\varrho}, \quad \cos \vartheta' = \frac{x'' + c}{\varrho'}, \quad \sin \vartheta' = \frac{y''}{\varrho'},$$

mithin ist

$$\begin{aligned} \varrho \varrho' \cos(\vartheta - \vartheta') &= x''x' + cx' + cx'' + c^2 - \frac{b^2}{a^2}x'x'' + b^2 = e^2x'x'' + cx' + cx'' + a^2 \\ &= (a + ex'')(a + ex'). \end{aligned}$$

Es ist aber $\varrho' = a + ex'$, daher

$$\cos(\vartheta - \vartheta') = \frac{a + ex}{\varrho}.$$

Hieraus folgt $\sphericalangle MFP = \sphericalangle PFN = \frac{1}{2} \sphericalangle MFN$. Geht NM durch F , so steht PF auf NM senkrecht. Ist NM eine

Tangente, so liegt P auf NM ; verbindet man den andern Brennpunkt F_1 mit dem Berührungspunkte P , so findet man leicht, dass die geraden Linien — Brennstrahlen — FP , F_1P mit der Tangente gleiche Winkel bilden.

658. Nach Aufg. 656 und der Eigenschaft der Direktrix ist $\sphericalangle BFM = 1 R$.

659. Ist die Gleichung des Kegelschnittes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a^2 > b^2$, hat B die Koordinaten x' , y' , so ist die Länge der Senkrechten vom Brennpunkte F auf die Tangente BM gleich

$$\frac{a^2 - cx'}{a^2 \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}.$$

660—697. Nimmt man den Brennpunkt zum Ursprung der Koordinaten, so ist die Gleichung des Kegelschnittes:

$$x^2 + y^2 = (mx + ny + h)^2.$$

Wenn also der Brennpunkt und drei Punkte des Kegelschnittes gegeben sind, so ist der Kegelschnitt im allgemeinen bestimmt. Treten an die Stelle der drei gegebenen Punkte des Kegelschnittes andere Punkte oder gerade Linien, welche eine besondere Lage zu dem Kegelschnitte haben, und zwar so, dass die Eigenschaften des Kegelschnittes und der geraden Linien, deren Punkte durch drei Gleichungen zwischen den unbekannten Grössen m , n , h dargestellt werden, so ist der Kegelschnitt im allgemeinen bekannt.

Ist die Gleichung der Direktrix gegeben

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0,$$

so ist die Gleichung des Kegelschnittes:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta)^2.$$

In dieser Gleichung sind α , β , e unbekannte Grössen.

Man muss bei der Auflösung Aufg. 697 berücksichtigen, dass ein Punkt des Kegelschnittes und Tangente ohne Berührungspunkt resp. eine Bestimmungsgleichung zwischen den unbekannten Koeffizienten der allgemeinen Gleichung des Kegelschnittes liefern, während eine Tangente mit Berührungspunkt, eine Asymptote, zwei Durchmesser, der Mittelpunkt, ein Brenn-

punkt, eine Direktrix zwei Relationen zwischen den unbekannten Koeffizienten der allgemeinen Gleichung des Kegelschnittes bestimmen.

Die Aufg. 692, 693, 694 sind deshalb unbestimmt. In der Aufg. 696 ist der Kegelschnitt unbestimmt, weil ein Punkt zu viel gegeben ist. Sind zwei Direktrixen und zwei Punkte des Kegelschnittes gegeben, so nehme man die Richtungen der Axen zu den Richtungen der Koordinatenaxe und den Ursprung des Systems auf der Axe, welche den Direktrixen parallel ist. Die Gleichung des Kegelschnittes ist dann

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2 (x - \delta)^2 \text{ und } (x + \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2 (x + \delta)^2.$$

Hieraus folgt $\alpha = e^2 \delta$. Verschiebt man das Koordinatensystem parallel, so kann man der Gleichung des Kegelschnittes die Form

$$(x - e^2 \delta)^2 + y^2 = e^2 (x - \delta)^2$$

geben. Um die Grösse e zu bestimmen, hat man für die Koordinaten x, y nur ein Wertepaar nötig, d. h. der Kegelschnitt ist durch zwei Direktrixen und einen Punkt bestimmt. Will man das Koordinatensystem in dieser Aufgabe nicht verschieben, so muss man beachten, dass für zwei gegebene Punkte des Kegelschnittes $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ auch die Grösse

$$(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = [(y_2 - \beta) - (y_1 - \beta)]^2 + (x_2 - x_1)^2$$

gegeben ist und dass ausserdem die Gleichungen

$$(x_1 - e^2 \delta)^2 + (y_1 - \beta)^2 = e^2 (x_1 - \delta)^2, (x_2 - e^2 \delta)^2 + (y_2 - \beta)^2 = e^2 (x_2 - \delta)^2$$

bestehen. Da aber im allgemeinen keine Relation zwischen den Koordinaten der Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ gegeben ist, so können die drei letzten Gleichungen nicht zugleich bestehen.

Wenn in Aufg. 695 die Axen des Kegelschnittes die Koordinatenachsen sind, die Direktrix die Gleichung $x = a$ und die Asymptote die Gleichung $bx + y = 0$ hat, so ist die Gleichung des Kegelschnittes $b^2 x^2 - y^2 = a^2 b^2 (1 + b^2)$. Die selbe Gleichung stellt den Kegelschnitt der Aufg. 674 dar wenn die Asymptote die Gleichung $bx + y = 0$ und der Brennpunkt die Koordinaten $x = a(1 + b^2), y = 0$ hat.

Wenn in Aufg. 676 die Koordinaten des Brennpunktes $a, 0$ sind, die Direktrix die Axe der y ist und die Tangente die Gleichung $px + qy + r = 0$ hat, so ist die Gleichung des Kegelschnittes $(x - a)^2 + y^2 = \frac{(ap + r)^2}{a^2 q^2 + r^2} x^2$.

Der Aufg. 681 genügen zwei Kegelschnitte. Da die Axen bestimmt sind, so ist auch der Mittelpunkt gegeben. Nimmt man die Axen zu Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der Kurve

$$x^2 + y^2 + c^2 = \frac{cx^2}{d} + cd.$$

Die Grösse d ist unbekannt und c die Ordinate des Brennpunktes. Soll der Kegelschnitt durch den Punkt x_1, y_1 gehen, so muss sein

$$x_1^2 + y_1^2 + c^2 = \frac{cx_1^2}{d} + cd.$$

Hieraus folgt

$$d_1 + d_2 = \frac{x_1^2 + y_1^2 + c^2}{c}, \quad d_1 d_2 = x_1^2.$$

Ist d_1 die grössere Wurzel, so ist $d_1 - c$ positiv und $d_2 - c$ negativ. Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte sind

$$\frac{x^2}{cd_1} + \frac{y^2}{(d_1 - c)c} = 1, \quad \frac{x^2}{cd_2} - \frac{y^2}{(c - d_2)c} = 1.$$

Der eine Kegelschnitt ist eine Ellipse, der andere eine Hyperbel.

Wenn in Aufg. 682 die Brennpunktaxe gegeben ist, so ist in der Gleichung $\frac{x^2}{cd} + \frac{y^2}{(d - c)c} = 1$ sowohl c als d unbekannt.

Ist die gerade Linie $px + qy + r = 0$ Tangente an die Kurve, so ist $d = \frac{q^2 c^2 + r^2}{(p^2 + q^2)c} = \varphi(c)$. Die Aufgabe ist also unbestimmt, da ihr alle Kegelschnitte $\frac{x^2}{c\varphi(c)} + \frac{y^2}{(\varphi(c) - c)c} = 1$ für jeden Wert von c genügen. Nimmt aber die Axe, welche der Direktrix parallel ist, so ist die Grösse c bestimmt und die Gleichung des Kegelschnittes ist:

$$c(p^2 + q^2) \left\{ \frac{x^2}{c(q^2 c^2 + r^2)} + \frac{y^2}{c(r^2 - p^2 c^2)} \right\} = 1.$$

Die Aufg. 683 ist unbestimmt, wenn man die Brennpunktaxe nimmt; sie liefert aber einen bestimmten Kegelschnitt, wenn die Axe parallel der Direktrix gegeben ist.

698—706. Zwei Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ schneiden sich im allgemeinen in vier Punkten. Durch diese Schnittpunkte gehen alle Kegelschnitte $S - kS' = 0$. Ist $S' = V_1 V_2$, so stellt die Gleichung $S - k V_1 V_2$ alle Kegelschnitte dar, welche durch die vier Punkte gehen, in denen die geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ den Kegelschnitt $S = 0$ schneiden. Die Bedingung, unter welcher die Gleichung $S - kS' = 0$ zwei gerade Linien darstellt, ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a'_{11}k & a_{12} - a'_{12}k & a_{13} - a'_{13}k \\ a_{12} - a'_{12}k & a_{22} - a'_{22}k & a_{23} - a'_{23}k \\ a_{13} - a'_{13}k & a_{23} - a'_{23}k & a_{33} - a'_{33}k \end{vmatrix} = 0.$$

Es giebt also drei Werte von k , für welche $S - kS' = 0$ zwei gerade Linien darstellt. Wenn k_1 , k_2 , k_3 diese drei Werte von k sind, so stellen $S - k_1 S' = 0$, $S - k_2 S' = 0$, $S - k_3 S' = 0$ die drei Paare von Sehnen dar, welche zwischen den vier Schnittpunkten der Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ gezogen werden können.

Die Gleichung $V_1 V_2 - k V_4 V_3 = 0$ stellt einen Kegelschnitt dar, welcher dem aus den geraden Linien $V_1 = 0$, $V_0 = 0$, $V_2 = 0$, $V_4 = 0$ gebildeten Viereck umgeschrieben ist.

Die geraden Linien $V_1 = 0$, $V_0 = 0$, $V_2 = 0$, $V_4 = 0$ in dieser Reihenfolge genommen, schneiden sich in Punkten, deren Gleichungen in Linienkoordinaten sind $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Die Kegelschnitte, welche die vier geraden Linien zu Tangenten haben, haben in Linienkoordinaten die Gleichung $\alpha_1 \alpha_2 - k \alpha_3 \alpha_4 = 0$.

Wenn vier Tangenten gegeben sind als die gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebener Kegelschnitte

$$K = A_{11} u^2 + 2 A_{12} uv + A_{22} v^2 + 2 A_{13} u + 2 A_{23} v + A_{33},$$

$$K' = A'_{11} u^2 + 2 A'_{12} uv + A'_{22} v^2 + 2 A'_{13} u + 2 A'_{23} v + A'_{33},$$

so ist die Gleichung aller Kegelschnitte, welche die vier geraden Linien zu Tangenten haben, $K - l K' = 0$. Wird $K = \alpha_1 \alpha_2$,

$K' = \alpha_3 \alpha_4$, so hat man die Gleichung $\alpha_1 \alpha_2 - k \alpha_3 \alpha_4 = 0$ der Kegelschnitte, welche die Verbindungslinien der Punkte $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4$ zu Tangenten haben.

706. $S = kxy$.

707. Ist die Gleichung des Kegelschnittes

$$S = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

so transformiere man sie auf die Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b = 0 = S_1.$$

Das System der Kegelschnitte ist

$$S_1 = k(a_{12}x^2 + (a_{11} - a_{22})xy - a_{12}y^2).$$

708. 1) $S_1 = k(a_{11}x + a_{12}y + (a_{12}x + a_{22}y) \operatorname{tg} \vartheta)(y - x \operatorname{tg} \vartheta)$,
2) $S_1 = k(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)$.

709. Es gehe allgemein der Kegelschnitt durch die fünf Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$.

Die Gleichungen von vier Sehnen sind

$$V_1 = (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0,$$

$$V_2 = (x - x_3)(y_4 - y_3) - (y - y_3)(x_4 - x_3) = 0,$$

$$V_3 = (x - x_2)(y_3 - y_2) - (y - y_2)(x_3 - x_2) = 0,$$

$$V_4 = (x - x_4)(y_1 - y_4) - (y - y_4)(x_1 - x_4) = 0.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes ist $V_1 V_2 = K V_3 V_4$. Da dieser Kegelschnitt durch den Punkt x_5, y_5 geht, so ist

$$K = \frac{\{(x_5 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_5 - y_1)(x_2 - x_1)\} \{(x_5 - x_3)(y_4 - y_3) - (y_5 - y_3)(x_4 - x_3)\}}{\{(x_5 - x_2)(y_3 - y_2) - (y_5 - y_2)(x_3 - x_2)\} \{(x_5 - x_4)(y_1 - y_4) - (y_5 - y_4)(x_1 - x_4)\}}.$$

Die Punkte unter 1) liegen auf der geraden Linie $x - y + 2 = 0$ und die Punkte unter 6) liegen auf der geraden Linie $x - y + 1 = 0$.

710. Bezeichnet man mit $AB = 0$ die Gleichung der geraden Linie AB , dann ist die Gleichung des dem Viereck $ABCD$ umgeschriebenen Kegelschnittes $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. Da dieser Kegelschnitt auch dem Viereck $DEFA$ umgeschrieben ist, so hat seine Gleichung auch die Form $DE \cdot FA - EF \cdot AD = 0$. Also ist $AB \cdot CD - DE \cdot FA = AD(BC - EF)$. Hieraus folgt, dass das Sechseck $ABCDEF$ ein Pascalsches Sechseck ist.

711. Wenn $S = 0$ der eine Kegelschnitt ist, $L = 0$ die Gleichung der gemeinsamen Sehne, so haben die Gleichungen der anderen Kegelschnitte die Form $S + LM = 0$, $S + LN = 0$. Die Gleichung der Durchschnittssehnen ist $L(M - N) = 0$; die geraden Linien $M = 0$, $N = 0$ schneiden sich auf der Sehne $M - N = 0$.

712, 713. Die beiden Kegelschnitte $S = 0$, $S - kV_1V_2 = 0$ berühren einander, wenn $V_1 = 0$ oder $V_2 = 0$ den Kegelschnitt $S = 0$ berührt oder wenn die beiden geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ sich auf $S = 0$ schneiden.

714, 715. Die Gleichung der Kegelschnitte, welche $S = 0$ im Punkte a, b berühren, ist $S = T(mx + ny + p)$. Geht die gerade Linie $mx + ny + p = 0$ durch den Punkt a, b , so ist die Gleichung der Kegelschnitte, welche den Kegelschnitt $S = 0$ im Punkte a, b oskulieren: $S = T[m(x - a) + n(y - b)]$.

716, 717. Ist die Gleichung des Kegelschnittes

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0,$$

so ist die Gleichung des oskulierenden Kegelschnittes von der Form:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = \left(\frac{xa}{a_1^2} + \frac{yb}{b_1^2} - 1 \right) \{ (m[x - a] + n[y - b]) \}.$$

Soll diese Gleichung einen Kreis darstellen, so muss der Koeffizient von xy gleich Null werden; die Gleichung hat die Form

$$l \left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 \right) = \left(\frac{xa}{a_1^2} + \frac{yb}{b_1^2} - 1 \right) \left(\frac{xa}{a_1^2} - \frac{yb}{b_1^2} - \frac{a^2}{a_1^2} - \frac{b^2}{b_1^2} \right).$$

Da der Koeffizient von x^2 gleich dem von y^2 sein muss, so ist $l = \frac{b_1'^2}{b_1^2 - a_1^2}$, wenn man setzt:

$$a_1'^2 = a^2 + b^2, \quad b_1'^2 = \frac{a^2 b_1^2}{a_1^2} + \frac{b^2 a_1^2}{b_1^2}.$$

Die Gleichung des Oskulationskreises ist daher:

$$x^2 + y^2 - \frac{2(a_1^2 - b_1^2)a^3x}{a_1^4} - \frac{2(b_1^2 - a_1^2)b^3y}{b_1^4} + a_1'^2 - 2b_1'^2 = 0.$$

Der Krümmungsradius ist gleich $\frac{b_1'^3}{a_1 b_1}$.

Ist die Gleichung des Kegelschnittes $y^2 = px$, so ist die Gleichung des oskulierenden Kreises:

$$(p^2 + 4pa)(y^2 - px) = \{2yb - p(x + a)\} \{2yb + p(x - 3a)\}.$$

718. Die Gleichung $S = kT^2$ repräsentiert einen Kegelschnitt, der mit $S = 0$ in der gemeinsamen Sehne $T = 0$ eine doppelte Berührung hat. Ist $T = 0$ die Gleichung einer Tangente, so haben beide Kegelschnitte vier zusammenfallende Punkte gemein.

719. Wenn die Gleichungen von zwei Kegelschnitten $S = 0$, $S' = 0$ sind, so ist die Bedingung, unter welcher die Kegelschnitte ähnlich und in ähnlicher Lage sind:

$$a_{11} : a'_{11} = a_{12} : a'_{12} = a_{22} : a'_{22}.$$

Es sind mithin alle Kegelschnitte $S - kV_1 = 0$ ähnlich und in ähnlicher Lage.

$$\mathbf{720.} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) : (a_{11} + a_{22})^2 = (a'_{11}a'_{22} - a'_{12}^2) : (a'_{11} + a'_{22})^2.$$

721, 722. Die Gleichung des Kegelschnittes, der die geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ in den Punkten berührt, in welchen sie von der geraden Linie $V_3 = 0$ geschnitten werden, ist $V_1V_2 - kV_3^2 = 0$.

723, 724, 725. Die Gleichung des Kegelschnittes, in Bezug auf den die geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ die Seiten eines sich selbst konjugierten Dreiecks sind, ist

$$k_1^2 V_1^2 + k_2^2 V_2^2 = k_3^2 V_3^2.$$

Die Gleichung der Polare eines Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt der Aufg. 725 hat die Form:

$$x(a_1V'_1 + b_1V'_2 + c_1V'_3) + y(a_2V'_1 + b_2V'_2 + c_2V'_3) = aV'_1 + bV'_2 + cV'_3, \\ V'_n = A_nx' + B_ny' + C_n.$$

Der Schnittpunkt von $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ ist Pol der geraden Linie $V_3 = 0$.

726, 727, 728. Die Gleichungen der drei Kegelschnitte sind $S = 0$, $S + V_1^2 = 0$, $S + V_2^2 = 0$; die Gleichungen der Durchschnittssehnen $L + M = 0$, $L - M = 0$ bilden mit den Sehnen der Berührung $L = 0$, $M = 0$ ein harmonisches Büschel. Stellt die Gleichung $S = 0$ ein Paar gerader Linien dar, so heisst der Satz: Die Berührungssehnen von zwei Kegelschnitten

mit ihren gemeinschaftlichen Tangenten gehen durch den Schnittpunkt eines Paares ihrer gemeinsamen Sehnen.

Der Satz 728 heisst: Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen und die des entsprechenden, ihm umgeschriebenen Vierecks bilden miteinander ein harmonisches Büschel.

729, 730, 731. Aus den drei Gleichungen $S + V_1^2 = 0$, $S + V_2^2 = 0$, $S + V_3^2 = 0$ folgen die Gleichungen der Durchschnittssehnen:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} V_1 - V_2 = 0, & V_2 - V_3 = 0, & V_3 - V_1 = 0, \\ V_1 + V_2 = 0, & V_2 - V_3 = 0, & V_3 + V_1 = 0; \end{cases} \\ & \begin{cases} V_1 + V_2 = 0, & V_2 + V_3 = 0, & V_3 - V_1 = 0, \\ V_1 - V_2 = 0, & V_2 + V_3 = 0, & V_3 + V_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Stellt $S = 0$ zwei gerade Linien dar, durch deren Schnittpunkt die gerade Linie $V_1 = 0$ geht, so hat man den Satz: Wenn man durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei Kegelschnitten ein Paar von geraden Linien zieht, so schneiden sich die Sehnen beider Kegelschnitte, welche ihre Durchschnittspunkte mit diesen geraden Linien verbinden, in einer der gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte. Wenn die Gleichungen

$$S + V_1^2 = 0, \quad S + V_2^2 = 0, \quad S + V_3^2 = 0$$

gerade Linien darstellen, so erhält man den Satz 510.

732, 733. Die Gleichung $x_1 x_3 = k x_2^2$ sagt aus, dass das Produkt der senkrechten Abstände eines Punktes des Kegelschnittes von zwei festen Tangenten desselben zu dem Quadrat seiner Entfernung von der zugehörigen Berührungssehne in einem konstanten Verhältnis ist.

Die Gleichung $x_1 x_3 = k x_2 x_4$ stellt den Satz dar: Das Produkt der senkrechten Abstände eines Punktes des Kegelschnittes von zwei Gegenseiten eines demselben eingeschriebenen Vierecks steht zu dem Produkt der Abstände des Punktes von den beiden anderen Gegenseiten desselben in einem konstanten Verhältnis.

734. Man setze in Aufg. 633 statt der geraden Linie $ax + by + c = 0$, $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ die geraden Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

735. Der Satz folgt durch Elimination von k in den Gleichungen $A + kB = 0$, $A' + kB' = 0$, wenn $A + kB = 0$, $A' + kB' = 0$ die Gleichungen von projektivischen $\left. \begin{array}{l} \text{Strahlen-} \\ \text{büscheln in Punktkoordinaten} \\ \text{reihen in Linienkoordinaten} \end{array} \right\}$ sind.

Die Ellipse.

736—738. Es ist:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}, \quad a'_{22} = a_{22}, \quad a'_{12} = a_{12}, \\ a'_{33} &= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}, \\ a'_{13} &= 0 = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}, \quad a'_{23} = 0 = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}, \\ A_{11} &= a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta, \\ A_{22} &= a_{11} \sin^2 \vartheta - 2a_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{22} \cos^2 \vartheta, \\ A_{33} &= a'_{33}, \quad \operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}; \\ A_{11} + A_{22} &= a_{11} + a_{22}, \quad A_{11}A_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \end{aligned}$$

739. Wird die Gleichung der Aufg. 737 durch die Transformation zu $A'_{11}x^2 + 2A'_{12}xy + A'_{22}y^2 + A'_{33} = 0$, so ist $A'_{11} = A_{11}$, $A'_{12} = A_{11} \cos w$, $A'_{22} = A_{11} \cos^2 w + A_{22} \sin^2 w$. Ist $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a'_{33} = 0$ gegeben, so erhält man durch die Transformation die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}x^2 + 2(a_{11} \cos w + a_{12} \sin w)xy \\ &\quad + (a_{11} \cos^2 w + 2a_{12} \cos w \sin w + a_{22} \sin^2 w)y^2 + a'_{33}. \end{aligned}$$

Wenn die Koordinatenachsen konjugierte Durchmesser sind, so ist nach Aufg. 495 $a_{11} \cos w + a_{12} \sin w = 0$ und die Gleichung des Kegelschnittes

$$a_{11}x^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{11}^2} a_{11}y^2 + a'_{33} = 0,$$

oder

$$Ax^2 + By^2 - 1 = 0.$$

Bildet der eine Durchmesser mit der Axe des Kegelschnittes den Winkel φ , so schliesst der andere Durchmesser mit derselben Axe des Kegelschnittes den durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -\frac{A}{B} \text{ bestimmten Winkel } \psi \text{ ein.}$$

Ist die Gleichung des Kegelschnittes, auf die Axen bezogen: $A_{11}x^2 + A_{22}y^2 - 1 = 0$, so findet man

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{A_{11}} + \frac{1}{A_{22}} \quad (\text{siehe Aufg. 745}),$$

$$A = A_{22} + (A_{22} - A_{11}) \cos^2 \varphi, \quad B = A_{22} + (A_{22} - A_{11}) \cos^2 \psi$$

und

$$A_{11} \cdot A_{22} \sin(\psi - \varphi) = AB.$$

Wenn der Kegelschnitt eine Ellipse ist, so setzt man

$$A_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad A_{22} = \frac{1}{b^2} \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{a'^2}, \quad B = \frac{1}{b'^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -\frac{b^2}{a^2}, \quad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \quad a'b' \sin(\psi - \varphi) = ab,$$

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}, \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \psi}.$$

Setzt man statt b^2 den negativen Wert $-b^2$, so erhält man die Formeln für die Hyperbel.

740. Wenn die Gleichung des Kegelschnittes

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

ist, so ist die Gleichung des Kegelschnittes in Bezug auf die Axen:

$$(a_{11} + a_{22} - M)x^2 + (a_{11} + a_{22} + M)y^2 + 2a_{33} = 0,$$

$$M^2 = 4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2.$$

Die zu den Axen transformierten Gleichungen sind:

$$1) \quad 2x^2 + 3y^2 = \frac{49}{5}, \quad 2) \quad (3 - \sqrt{5})x^2 + (3 + \sqrt{5})y^2 = 1,$$

$$3) \quad (5 - \sqrt{10})x^2 + (5 + \sqrt{10})y^2 = 14,$$

Die Gleichungen der Axen sind:

$$1) \quad 2x - y = 0, \quad x + 2y = 0; \quad 2) \quad x^2 = 4xy + y^2;$$

$$3) \quad x^2 + 6xy = y^2; \quad 4, 5, 6) \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Die Gleichungen von zwei konjugierten Durchmessern sind: $y = x \operatorname{tg} \varphi$, $y \operatorname{tg} \varphi + \frac{A}{B}x = 0$, wenn die Gleichung des Kegelschnittes $Ax^2 + By^2 = 1$ ist. Man hat zu setzen: $\varphi = 18^\circ$,

$$30^\circ, 45^\circ \quad \text{und} \quad \frac{A}{B} = \frac{2}{3}, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}, \quad \frac{5 - \sqrt{10}}{5 + \sqrt{10}}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{2}{3}.$$

Die Gleichungen der Ellipsen, bezogen auf diese konjugierten Durchmesser, haben die Form $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$. Die Werte für m, n erhält man aus den Gleichungen

$$m + n = a + b, \quad m = \frac{ab}{a - (a - b) \cos^2 \varphi},$$

wenn man setzt

$$\varphi = 18^\circ, 30^\circ, 45^\circ;$$

$$(a, b) = \left(\frac{49}{10}, \frac{49}{15}\right), \left(\frac{1}{3 - \sqrt{5}}, \frac{1}{3 + \sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{5 - \sqrt{10}}, \frac{1}{5 + \sqrt{10}}\right), \\ \left(1, \frac{1}{4}\right), \left(4, \frac{9}{4}\right), (3, 2).$$

741. Ist die Gleichung eines Kegelschnittes bezogen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Axen den Winkel w einschliessen: $a'_{11}x^2 + 2a'_{12}yx + a'_{22}y^2 + a_{33} = 0$ und ist die Gleichung desselben Kegelschnittes in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $a_{11}x^2 + 2a_{12}yx + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$, so ist nach Aufg. 738, 739:

$$a_{11} + a_{22} = \frac{a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} \cos w}{\sin^2 w}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{a'_{11}a'_{22} - a_{12}'^2}{\sin^2 w}.$$

Sind die Axen des Kegelschnittes die Koordinatenachsen, so ist $a_{12} = 0$ und man hat zur Bestimmung von a_{11}, a_{22} zwei Gleichungen. Die Gleichung des Kegelschnittes in Bezug auf die Axen ist:

$$(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} \cos w - M)x^2 + (a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} \cos w + M)y^2 \\ + 2a'_{33} \sin^2 w = 0,$$

$$M^2 = \{2a'_{12} - (a'_{11} + a'_{22}) \cos w\}^2 + (a'_{11} - a'_{22})^2 \sin^2 w.$$

Nimmt man $\cos w = \frac{3}{5}$, also $\sin^2 w = \frac{16}{25}$, so sind die Gleichungen der Kegelschnitte in Bezug auf die Axen:

- 1) $16x^2 + 41y^2 = 28,8,$
- 2) $(41 - \sqrt{1249})x^2 + (41 + \sqrt{1249})y^2 = 44,8,$
- 3) $(3 - \sqrt{5})x^2 + (3 + \sqrt{5})y^2 = 6,4,$
- 4) $(9 - \sqrt{7,4})x^2 + (9 + \sqrt{7,4})y^2 = 14,08,$
- 5) $(77 - \sqrt{3433})x^2 + (77 + \sqrt{3433})y^2 = 83,2,$
- 6) $(47 - \sqrt{17 \cdot 97})x^2 + (47 + \sqrt{17 \cdot 97})y^2 = 160.$

Ist $w = 60^0$, so sind die auf die Axen bezogenen Gleichungen der Ellipsen:

- 1) $(24 - 2\sqrt{21})x^2 + (24 + 2\sqrt{21})y^2 = 27,$
- 2) $(17 - 4\sqrt{13})x^2 + (17 + 4\sqrt{13})y^2 = 21,$
- 3) $(5 - \sqrt{13})x^2 + (5 + \sqrt{13})y^2 = 12,$
- 4) $15x^2 + 23y^2 = 33,$
- 5) $2(16 - \sqrt{139})x^2 + 2(16 + \sqrt{139})y^2 = 39,$
- 6) $3x^2 + 35y^2 = 75.$

Ist $w = 18^0, 35^0, \alpha$, so sind die auf die Axen bezogenen Gleichungen der Ellipsen:

- 1) $(15 - 6 \cos \alpha - \sqrt{61 - 180 \cos \alpha + 200 \cos^2 \alpha})x^2$
 $+ (15 - 6 \cos \alpha + \sqrt{61 - 180 \cos \alpha + 200 \cos^2 \alpha})y^2$
 $= 18 \sin^2 \alpha,$
- 2) $(10 - 3 \cos \alpha - \sqrt{73 + 36 \cos^2 \alpha - 60 \cos \alpha})x^2$
 $+ (10 - 3 \cos \alpha + \sqrt{73 + 36 \cos^2 \alpha - 60 \cos \alpha})y^2$
 $= 14 \sin^2 \alpha,$
- 3) $(3 - \cos \alpha - \sqrt{5 + 5 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha})x^2$
 $+ (3 - \cos \alpha + \sqrt{5 + 5 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha})y^2 = 8 \sin^2 \alpha,$
- 4) $(12 - 5 \cos \alpha - \sqrt{29 + 140 \cos^2 \alpha - 120 \cos \alpha})x^2$
 $+ (12 - 5 \cos \alpha + \sqrt{29 + 140 \cos^2 \alpha - 120 \cos \alpha})y^2$
 $= 22 \sin^2 \alpha,$
- 5) $(19 - 6 \cos \alpha - \sqrt{(6 - 19 \cos \alpha)^2 + 169 \sin^2 \alpha})x^2$
 $+ (19 - 6 \cos \alpha + \sqrt{(6 - 19 \cos \alpha)^2 + 169 \sin^2 \alpha})y^2$
 $= 26 \sin^2 \alpha,$
- 6) $(10 - \cos \alpha - \sqrt{65 + 36 \cos^2 \alpha - 20 \cos \alpha})x^2$
 $+ (10 - \cos \alpha + \sqrt{65 + 36 \cos^2 \alpha - 20 \cos \alpha})y^2 = 50 \sin^2 \alpha.$

Bringt man diese Gleichungen auf die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ist die Gleichung der Ellipsen, bezogen auf konjugierte Durchmesser, von denen der eine mit der Axe der x den Winkel α bildet:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad A^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha},$$

$$B^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha}.$$

742, 743. Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 - b^2 = c^2.$$

Ist der Mittelpunkt der Pol, so ist die Polargleichung:

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \vartheta} = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}.$$

744, 745. Die auf die Axen bezogene Gleichung sei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und die auf die konjugierten Durchmesser bezogene Gleichung sei $\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$, so ist

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \quad a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi},$$

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \psi}, \quad a' b' \sin(\psi - \varphi) = ab.$$

Der Inhalt des Vierecks ist $2 a' b' \sin(\psi - \varphi) = 2 ab$.

746, 747, 748. Aus der Gleichung folgt $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Die Gleichung des Kreises in Aufg. 748 ist $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, also beschreibt P die Ellipse. Aus der Gleichung der Aufg. 743 erhält man den Satz 747.

$$\mathbf{749.} \quad \frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 1, \quad \frac{(x' + x'') x}{a^2} + \frac{(y' + y'') y}{b^2} = \frac{x' x''}{a^2} + \frac{y' y''}{b^2} + 1.$$

$$\mathbf{750.} \quad y = 3. \quad \mathbf{751.} \quad 3x + 6y = 12.$$

$$\mathbf{752.} \quad \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = \left(\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} - 1 \right)^2.$$

$$\mathbf{753.} \quad \frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 1; \quad x = a^2 m, \quad y = b^2 n.$$

$$\mathbf{754.} \quad a^2 m^2 + b^2 n^2 = 1.$$

$$\mathbf{755, 756.} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2ab \left\{ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}}{x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2}.$$

Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ die Gleichung des Ortes der Aufg. 756.

$$757, 758 \quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{x'} = -\frac{b^2}{a^2} \cotg \psi.$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes $x''y''$ des zu OP konjugierten Durchmessers mit der Ellipse findet man, indem man x, y aus den Gleichungen $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bestimmt.

Liegt x', y' auf der Ellipse, so ist $\frac{x''}{a} = \pm \frac{y'}{b}, \quad \frac{y''}{b} = \mp \frac{x'}{a}$.

759, 760, 761. Es seien x', y' die Koordinaten des Endpunktes von a' , also $a'^2 = x'^2 + y'^2 = x'^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) = b^2 + e^2 x'^2$.

Hat der Endpunkt von b' die Koordinaten x'', y'' , so ist

$$b'^2 = x''^2 + y''^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2 = a^2 - e^2 x'^2.$$

Also $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$. Ist φ der Winkel zwischen a' und b' , so ist $a'b' \sin \varphi = ab$.

762. Die Gleichung der Ellipse sei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, die Gleichung der Tangente $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ oder $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

Es ist mithin $\frac{x'}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}, \quad \frac{y'}{b^2} = \frac{\sin \alpha}{p}$; hieraus folgt

$$1) \quad p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha.$$

Die Gleichung der Tangente ist also

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}.$$

$$2) \quad p = \frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2 x'^2}{a^2} + \frac{a^2 y'^2}{b^2}}} = \frac{ab}{b'}.$$

Die Entfernung irgend eines Punktes x'', y'' von der Tangente ist $\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} - x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$.

763, 764. A, B seien die Endpunkte eines Durchmessers mit den Koordinaten $(x', y'), (-x', -y')$ und $C(x'', y'')$ ein Punkt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bilden AC, BC resp. mit der Axe

die Winkel φ , ψ , so ist $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2} = -\frac{b^2}{a^2}$, d. h.

AC , BC laufen konjugierten Durchmessern parallel. Ist der Winkel zweier konjugierten Durchmesser gegeben, so ist der Winkel an C bekannt. Man kann die Durchmesser leicht konstruieren, indem man über irgend einem Durchmesser das Segment eines Kreises beschreibt, welches den Winkel C enthält und die Schnittpunkte des Kreises und der Ellipse mit dem Endpunkte des angenommenen Durchmessers verbindet, so hat man ein Paar Supplementarsehnen, welche den zu bestimmenden Durchmessern parallel sind.

765. Folgt aus Aufg. 499 und aus den Gleichungen

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = \pm 1.$$

766. Nimmt man den Durchmesser parallel den festen Tangenten zur Axe der y und den zur Axe der y konjugierten Durchmesser zur Axe der x , so sind die Gleichungen der Ellipse und der variablen Tangente

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1.$$

Die Abschnitte auf den festen Tangenten sind:

$$y_1 = \frac{b'^2}{y'} \left(1 - \frac{x'}{a'}\right), \quad y_2 = \frac{b'^2}{y'} \left(1 + \frac{x'}{a'}\right),$$

also

$$y_1 y_2 = \frac{b'^4}{y'^2} \left(1 - \frac{x'^2}{a'^2}\right) = b'^2.$$

767. Nimmt man den Durchmesser parallel der veränderlichen Tangente zur Axe der y und den zu dieser Axe konjugierten Durchmesser zur Axe der x , so sind die Gleichungen der Ellipse und der festen Tangenten

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = \pm 1.$$

Die Segmente auf der Tangente sind:

$$y_1 = \frac{b^2}{y'} \left(1 - \frac{x'}{a'}\right), \quad y_2 = -\frac{b^2}{y'} \left(1 + \frac{x'}{a'}\right),$$

also abgesehen vom Vorzeichen $[y_1 \cdot y_2] = b^2$.

768. Ein Durchmesser parallel der Tangente und der ihm konjugierte Durchmesser seien die Axen, so sind die Gleichungen zweier konjugierten Durchmesser:

$$y = \frac{y'}{x'} x, \quad \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 0.$$

Die in der Tangente gebildeten Abschnitte sind:

$$y_1 = \frac{y'}{x'} a', \quad y_2 = -\frac{b'^2}{a'} \frac{x'}{y'}, \quad \text{also } y_1 \cdot y_2 = -b'^2.$$

769 Es seien gegeben die beiden Durchmesser $AA_1 = 2OA$, $BB_1 = 2OB$. Durch A ziehe man eine Parallele zu OB , welche Tangente an die Ellipse ist. Man bestimme auf OA einen Punkt P so, dass $OA \cdot AP = OB^2$ (P liegt für die Ellipse so, dass A zwischen O und P ist und für die Hyperbel so, dass der Punkt A nicht zwischen O und P ist); man beschreibe einen Kreis durch O und P , der seinen Mittelpunkt auf der Tangente in A hat und diese Tangente in M , N schneidet; es sind dann die geraden Linien OM , ON die Axen der Kurve. Es ist nämlich $AM \cdot BN = OA \cdot AP = OB^2$, also sind OM , ON konjugierte Durchmesser, welche aufeinander senkrecht stehen. (Siehe Aufg. 768.)

Folgende Betrachtung giebt eine Konstruktion der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern.

Es seien $AB = 2a$ und $CD = 2b$ die Axen einer Ellipse. Nimmt man diese als Koordinatenachsen an, so hat AC die Gleichung
und BC die Gleichung

$$ay - bx = ab$$

$$ay + bx = ab.$$

Haben die Punkte M (in AC) und N (in BC) dieselbe Abscisse $OQ = m$, so sind ihre Ordinaten:

$$QM = \frac{b}{a} (a + m), \quad QN = \frac{b}{a} (a - m);$$

es ist also die Gleichung der geraden Linie BM :

$$\frac{y}{a - x} = \frac{b(a + m)}{a(a - m)},$$

die Gleichung der geraden Linie AN :

$$\frac{y}{a + x} = \frac{b(a - m)}{a(a + m)}.$$

Die geraden Linien BM und AN schneiden sich im Punkte P :

$$x = \frac{2a^2m}{a^2 + m^2}, \quad y = \frac{b(a^2 - m^2)}{a^2 + m^2}.$$

Diese Werte genügen der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

der Punkt P liegt also auf der Ellipse, welche a und b zu Axen hat. Die Gleichung der Tangente in P ist:

$$2bmx + (a^2 - m^2)y = b(a^2 + m^2)$$

und wird durch $x = m$, $y = b$ erfüllt; die Tangente geht also durch den Punkt L , in welchem die gerade Linie MN die zu AB durch C gezogene Parallele trifft.

Die Rechnung bleibt ungeändert, wenn AB und CD konjugierte Durchmesser sind. Man kann deshalb eine Ellipse aus den Axen oder konjugierten Durchmessern AB , CD konstruieren, indem man AC , BC , dann $CF \parallel AB$ zieht und diese gerade Linien durch beliebige zu CD Parallelen resp. in M , N , L schneidet; die geraden Linien PM und AN treffen sich in einem Ellipsenpunkte P , dessen Tangente durch L geht.

770. Es seien gegeben die beiden Durchmesser $AA_1 = 2OA$, $BB_1 = 2OB$. Man fälle von A ein Perpendikel $AC = OB$ auf BB_1 und ziehe den Durchmesser OC . Schneidet AC den Durchmesser BB_1 in D , lässt man die Punkte D und C mit AC auf BB_1 und OC bez. hingleiten, so beschreibt A die Ellipse. Ferner mache man auf BB_1 die Strecke OE gleich CD , beschreibe einen Kreis über OE , welcher AC berührt, ziehe darauf die Verbindungslinie des Kreiscentrums M mit B , welche den Kreis in X , Y schneidet. Es sind dann BX , BY die resp. Längen der beiden Halbaxen und OY , OX die resp. Richtungen der beiden Axen.

Es sei $CD = \alpha$, $DA = \beta$, $\sphericalangle BOC = \omega$, $\sphericalangle BOA = \omega_1$, so ist der Ort von A die Ellipse

$$\beta^2 = y^2 + \frac{x^2\beta^2}{(\alpha + \beta)^2} - 2xy \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cos \omega$$

in Bezug auf die Koordinatenaxen OC , OB . Transformiert man

auf die Axen OA , OB , setzt man also $y \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega}$ statt y und $x + y \frac{\sin(\omega + \omega_1)}{\sin \omega}$ statt x und $\alpha \cotg \omega = \beta \cotg \omega_1$, so ist die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{y^2 \sin^2 \omega}{\beta^2} = 1$$

oder

$$\frac{x^2}{OB^2} + \frac{y^2}{OA^2} = 1;$$

es sind also OA , OB konjugierte Durchmesser.

Aus der Figur folgt ferner $BY \cdot BX = OA \cdot OB \sin \omega_1$, $BY^2 + BX^2 = OA^2 + OB^2$, d. h. BX , BY sind die Längen der beiden Halbaxen $= a$, b .

Ferner ist $\alpha = (a - b) \sin \omega$, $ab = (\alpha + \beta) \beta$, und man erhält:

$$\cotg \omega \operatorname{tg}^2 \omega_1 + \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{ab}{(a - b)^2} \cotg \omega + \frac{ab \operatorname{tg} \omega}{(a - b)^2}.$$

Setzt man $\sphericalangle BOY = \varphi$, so ist:

$$\frac{b}{a} \cotg \varphi = \frac{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

und es ist daher

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cotg \varphi}{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Bilden die konjugierten Durchmesser mit den Axen die Winkel φ_1 , φ_2 , so ist $\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ und $\operatorname{tg} \omega_1 = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)$, also:

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{b^2}{a^2} \cotg \varphi_1}{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

mithin auch $\varphi = \varphi_1$.

771–774. Die Entfernung der Brennpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist gleich $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$. Die Koordinaten der Brennpunkte sind: $(c, 0)$, $(-c, 0)$.

Die Entfernung eines Punktes P der Ellipse vom Brennpunkte F ist $FP = a - ex'$ und vom Brennpunkte F' ist $F'P = a + ex'$, also $FP + F'P = 2a$. (Siehe Aufg. 644, 645.)

775. Der Brennpunkt $F(+c, 0)$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, hat von der Tangente $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ die Entfernung

$$\frac{1 - \frac{cx'}{a^2}}{\left\{ \frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{b'} (a - ex') = \frac{b}{b'} FP = FT.$$

Ebenso ist $F'T' = \frac{b}{b'} F'P$, also $FT \cdot FT' = b^2$.

776. Aus Aufg. 775 folgt:

$$FT : FM = \sin FMT = b : b' = F'T' : F'M = \sin F'MT'.$$

777. Die Länge OA ist gleich der halben grossen Axe.

778, 779. Die Gleichung der Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der konfokalen Kegelschnitte ist:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha^2 - a^2 = \beta^2 - b^2.$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte der Kegelschnitte genügen der Gleichung:

$$\frac{(a^2 - \alpha^2) x'^2}{a^2 \alpha^2} + \frac{(b^2 - \beta^2) y'^2}{b^2 \beta^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x'^2}{a^2 \alpha^2} + \frac{y'^2}{b^2 \beta^2} = 0.$$

Dies ist die Bedingung, unter welcher die Tangenten

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1, \quad \frac{xx'}{\alpha^2} + \frac{yy'}{\beta^2} = 1$$

senkrecht sind. (Siehe Aufg. 681.)

780 folgt einfach aus 775, 778, 779. Sind PT, PT_1 zwei Tangenten an die Ellipse, so ist $\sphericalangle FPT = \sphericalangle F'PT_1$.

781. Setzt man in Aufg. 762 $x' = c, y' = 0, p = \varrho$, so ist die Polargleichung des Ortes $\varrho = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} - c \cos \alpha$ oder $\varrho^2 + 2c\varrho \cos \alpha = b^2$. Dies ist ein Kreis über die grosse Axe.

782–784. Beweis siehe Aufg. 654, 655.

785 Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, in welcher a und b unbestimmt sind und der Relation $a^2 - b^2 = c^2$ genügen, stellt alle konfokalen Kegelschnitte dar.

Der Pol der geraden Linie $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ hat die Koordinaten $mx = a^2$, $ny = b^2$, mithin ist $mx - ny = c^2$ der Ort des Pols.

786, 787 folgt aus Aufg. 783.

788. Die Polare des Punktes x', y' in Bezug auf den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$. Die Senkrechte auf die Polare ist $\frac{xy'}{b^2} - \frac{x'y}{a^2} = x'y' \frac{e^2}{b^2}$; diese gerade Linie schneidet die Axe der x im Punkte $x = x'e^2$, $y = 0$. Für ein konstantes x' bewegt sich (x', y') in einer festen Senkrechten zur Axe.

789, 790, 791. Die Gleichung der Ellipse sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Polaren von P ist:

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

Also ist:

$$\frac{m}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}, \quad \frac{n}{b^2} = \frac{\sin \alpha}{p}, \quad p = CA = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{m^2 b^4 + n^2 a^4}}.$$

Die Gleichung von PB' ist:

$$\frac{xn}{b^2} - \frac{ym}{a^2} = mn \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}.$$

Es ist:

$$BB' = (a^2 - e^2 m^2) \frac{b^2}{\sqrt{m^2 b^4 + n^2 a^4}}, \quad PB' = \frac{\sqrt{m^2 b^4 + n^2 a^4}}{a^2},$$

$$FK = p - c \cos \alpha, \quad F'K' = p + c \cos \alpha.$$

Hieraus folgen die Gleichungen Aufg. 791. Liegt P auf der Ellipse, so fällt B in P ; es ist $PB' = BB'$, also

$$PB' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 m^2} = \frac{bb'}{a}.$$

792. Wenn a, b die Axen der Ellipse sind, so ist die Polargleichung der Ellipse in Bezug auf den Brennpunkt

$$\varrho = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} = \frac{p}{2} \frac{1}{1 + e \cos \vartheta};$$

p heisst Parameter, latus erectum oder latus rectum.

793. Schneidet die Sehne durch F den Kegelschnitt der Aufg. 792 in dem Punkte P, P' ; so ist

$$FP = \frac{p}{2} \frac{1}{1 + e \cos \vartheta}, \quad FP' = \frac{p}{2} \frac{1}{1 - e \cos \vartheta};$$

also

$$\frac{1}{FP} + \frac{1}{FP'} = \frac{4}{p}.$$

794. Die Aufg. 793 giebt

$$FP + FP' = \frac{p}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{2b^2}{a(1 - e^2 \cos^2 \vartheta)}.$$

Aus der Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt

$$b^2 R^2 \cos^2 \vartheta + a^2 R^2 \sin^2 \vartheta = a^2 b^2;$$

also

$$R^2 = \frac{b^2}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 \vartheta} = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta} = a \frac{FP + FP'}{2} = a \frac{PP'}{2}.$$

795. Die Lösung folgt aus Aufg. 759, 794.

796. Sind $PP', P_1 P'_1$ die beiden Sehnen, welche durch den Brennpunkt gehen, so ist nach Aufg. 794:

$$a PP' = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}, \quad a P_1 P'_1 = \frac{b^2}{1 - e^2 \sin^2 \vartheta};$$

es ist daher

$$\frac{1}{PP'} + \frac{1}{P_1 P'_1} = \frac{a}{b^2} (1 - e^2) = \text{konstant}.$$

797, 798, 799. $PB = \frac{bb'}{a}, \quad PD = \frac{ab'}{b}, \quad PB \cdot PD = b'^2,$

$PB : PD = b^2 : a^2, \quad BM = \frac{b^2}{a^2} x', \quad MR = \frac{a^2 - x'^2}{x'}; \quad (x', y')$ Koordinaten von P .

800, 801. Nach Aufg. 762 ist die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse von der Tangente in P gleich $\frac{ab}{b'} = d,$

also

$$PB \cdot d = b^2, PD \cdot d = a^2,$$

$$PB = \frac{b^2}{d} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}}.$$

802. Ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse, so hat die Normale im Punkte x'', y'' die Gleichung

$$a^2 x y'' - b^2 x'' y = (a^2 - b^2) x'' y''.$$

Nimmt man den Punkt x', y' auf der Normale an, so findet man, dass die Punkte der Kurve, deren Normalen durch x', y' gehen, die Durchschnittspunkte der Ellipse mit der Hyperbel $a^2 x' y - b^2 x y' = c^2 x y$ sind.

803. Die Tangente im Punkte M sei die Axe der y und die Normale die Axe der x . Die Gleichung der Kurve ist $a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x = 0$. Die beiden geraden Linien durch M haben die Gleichungen $y - a_1 x = 0$, $y - b_1 x = 0$, also die gemeinschaftliche Gleichung $y^2 - xy(a_1 + b_1) + a_1 b_1 x^2 = 0$. Multipliziert man die letzte Gleichung mit a_{22} und subtrahiert sie von der Gleichung des Kegelschnitts, so erhält man die Gleichung $xy(2a_{12} + a_{22}(a_1 + b_1)) + (a_{11} - a_{22}a_1 b_1)x^2 + 2a_{13}x = 0$. Aus dieser Gleichung folgt, dass die Gleichung von PP' ist

$$y(2a_{12} + a_{22}(a_1 + b_1)) + (a_{11} - a_{22}a_1 b_1)x + 2a_{13} = 0.$$

Diese gerade Linie geht durch den Punkt $x = \frac{2a_{13}}{a_{22}a_1 b_1 - a_{11}}$.

Es ist die Grösse $a_1 b_1$ das Produkt der trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche MP , MP' mit der Normalen bilden, mithin konstant und daher auch die Grösse $x = \frac{2a_{13}}{a_{22}a_1 b_1 - a_{11}}$.

Liegt M auf der grossen Axe der Ellipse, so ist deren Gleichung $y^2 = px - \frac{b^2}{a^2} x^2$.

804. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten sind:

$$x_t = \frac{a^2(n - q)}{np - mq}, \quad y_t = \frac{b^2(m - p)}{mq - np}.$$

Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Normalen sind:

$$x_n = \frac{(a^2 - b^2) m p x_t}{a^4}, \quad y_n = \frac{(b^2 - a^2) n q y_t}{b^4}.$$

805. Es sind die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Normalen:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^4} mp \frac{mq + np}{n + q}, \quad y = \frac{b^2 - a^2}{b^4} nq \frac{mq + np}{m + p}.$$

Setzt man $m = p$, $n = q$, so findet man die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$x_r = \frac{a^2 - b^2}{a^4} m^3, \quad y_r = \frac{b^2 - a^2}{b^4} n^3.$$

Der Tangente in (m, n) ist der Durchmesser parallel, dessen halbe Länge gleich

$$b' = \sqrt{a^2 - e^2 m^2} = \sqrt{b^2 + c^2 \frac{n^2}{b^2}}$$

ist. Man kann daher setzen:

$$x_r = \frac{a^2 - b'^2}{a^2} m, \quad y_r = \frac{b^2 - b'^2}{b^2} n.$$

Die Grösse des Krümmungshalbmessers ist:

$$r = b'^2 \sqrt{\frac{m^2}{a^4} + \frac{n^2}{b^4}} = \frac{b'^3}{ab} = \frac{b'^2}{d}. \quad (\text{Siehe Aufg. 762.})$$

806. Es ist $PN = \frac{bb'}{a}$, $\cos FPN = \frac{b}{b'}$, also $r \cos^2 FPN = PN$.

Liegt der Punkt Q auf FP und ist $QN \perp PN$, $RQ \perp FQ$, so schneidet RQ die Normale PN im Krümmungsmittelpunkt.

Ist $CP = a'$, $\angle CPN = 90 - \alpha$, so ist $a' \sin \alpha = d = \frac{ab}{b'}$, also:

$$r = \frac{b'^2}{a' \sin \alpha}.$$

Es ist $CP : CN = \sin CNP : \cos \alpha$, also:

$$r^2 = \frac{b'^4}{a'^2 - CN^2 \sin^2 CNP}.$$

807, 808. Die Gleichung des Krümmungskreises für den Punkt m, n der Ellipse ist nach Aufg. 805:

$$(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2 = r^2.$$

Dieser Kreis hat mit der Ellipse den Punkt:

$$x = \frac{4m^3}{a^2} - 3m, \quad y = \frac{4n^3}{b^2} - 3n$$

gemeinschaftlich. Ist der Punkt x, y gegeben, so genügen drei Punkte $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)$ diesen Gleichungen. Nach der Theorie der Gleichungen ist $m_1 + m_2 + m_3 = 0$, $n_1 + n_2 + n_3 = 0$, d. h. die Seitenhalbierungslinien des durch die Punkte $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)$ gebildeten Dreiecks gehen durch den Koordinatenanfang.

Die vier Punkte $x', y'; x'', y''; x''', y'''; x''', y''''$ liegen auf der Ellipse; man setze:

$$\begin{aligned} x' &= a \cos \alpha, & y' &= b \sin \alpha; & x'' &= a \cos \beta, & y'' &= b \sin \beta; \\ x''' &= a \cos \gamma, & y''' &= b \sin \gamma; & x'''' &= a \cos \delta, & y'''' &= b \sin \delta. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Sehnen sind:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{y}{b} \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ \frac{x}{a} \cos \frac{1}{2}(\gamma + \delta) + \frac{y}{b} \sin \frac{1}{2}(\gamma + \delta) &= \cos \frac{1}{2}(\gamma - \delta). \end{aligned}$$

Damit die vier Punkte in einem Kreise liegen, muss die erste Sehne mit der einen Axe denselben Winkel bilden, wie die zweite Sehne mit der andern Axe. Es ist daher $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = 0$, oder $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, oder $= 2m\pi$. Fällt der Kreis mit dem oskulierenden Kreise zusammen, so ist $\alpha = \beta = \gamma$ und $\delta = -3\alpha$.

Gehen die Oskulationskreise von drei Punkten durch einen Punkt, so ist für einen der Berührungspunkte $\alpha = -\frac{\delta}{3}$. Da aber der Sinus und Cosinus von δ unverändert bleibt, wenn δ um 360° vermehrt wird, so ergibt sich ebenso:

$$\alpha = -\frac{1}{3}\delta + 120^\circ, \quad \alpha = -\frac{1}{3}\delta + 240^\circ.$$

Bestimmt man die Grössen x, y , welche diesen Winkeln entsprechen, so sieht man, dass diese Punkte in einem Kreise liegen.

809. Nach Aufg. 805 hat der Punkt mn der Ellipse den Krümmungsmittelpunkt

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^4} m^3, \quad y = \frac{b^2 - a^2}{b^4} n^3, \quad \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 1.$$

Setzt man $c^2 : a = A$, $c^2 : b = B$, so erhält man als Gleichung des Ortes:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

810. Nimmt man die Tangente und Normale im Punkte P zu Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der gegebenen Ellipse:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}y = 0,$$

und die Gleichung der veränderlichen Ellipse ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Axen a, b müssen so bestimmt werden, dass der Gleichung die Werte $x = -\frac{a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$, $y = \frac{a_{11}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$ genügen und dass eine der Axen der gegebenen Ellipse Tangente an die veränderliche Ellipse ist. Man findet, dass die Radien der zwei konzentrischen Kreise gleich der Summe und der Differenz der halben Axen der gegebenen Ellipse sind.

811 Ist C der Mittelpunkt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, hat P die Koordinaten x', y' , so ist

$$CN = e^2 x', \quad FN = c + e^2 x', \quad F'N = c - e^2 x'.$$

812. Es ist $FP = a - ex$; T hat die Koordinaten $x, a - ex$ und R die Koordinaten $(x, 0)$, also ist $TR = a - ex = FP$.

813. Der Ort ist die dem Brennpunkte entsprechende Direktrix.

814. Der Ort ist ein Kreis.

815. Der Ort ist ein Kreis, welcher den Brennpunkt zum Mittelpunkt hat und durch die Endpunkte der kleinen Axe geht.

816. Wenn die Gleichung der gegebenen Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, so ist der Ort der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2.$$

817. Nimmt man den Brennpunkt zum Pol von Polarkoordinaten, setzt den konstanten Winkel gleich β , so ist die Polargleichung des Ortes

$$\varrho^2 + 2\varrho c \cos \vartheta \sin \beta = b^2 \sin^2 \beta.$$

Ist $\beta = 90^\circ$, so erhält man Aufg. 781.

818. Die Bedingung, unter welcher die gerade Linie $x + ny = x_1 + ny_1$ Tangente an den Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, ist:

$$\frac{a^2}{(x_1 + ny_1)^2} + \frac{a^2 n^2 - c^2 n^2}{(x_1 + ny_1)^2} = 1.$$

Die Grösse c ist für konfokale Ellipsen konstant. Um die Gleichung des Ortes zu finden, hat man in die Bedingungsgleichung die Werte von a und n , welche sich aus den Gleichungen $x(x_1 + ny_1) = a^2$, $y(x_1 + ny_1) = (a^2 - c^2)n$ ergeben, zu setzen. Liegt der Punkt auf der grossen Axe, so ist $y_1 = 0$, und der Ort ist ein Kreis.

819. Die gerade Linie AA' schneide die dem Brennpunkte F entsprechende Direktrix in D , ferner sei AC , ME senkrecht auf der Direktrix; es ist:

$$\frac{AC}{ME} = \frac{AD}{MD}, \text{ also } \frac{FA}{AD} : \frac{FM}{MD} = \frac{e}{e_1}$$

oder:

$$\frac{\sin ADF}{\sin AFD} : \frac{\sin MDF}{\sin MFD} = \frac{e}{e_1}.$$

Ist T der Pol von AA' , so ist nach Aufg. 655 AFT die halbe Summe und MFT die halbe Differenz der Winkel AFM und $A'FM$. Und da $\frac{\cos MFT}{\cos AFT} = \frac{e}{e'}$, so ist:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} AFM \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} A'FM = \frac{e - e'}{e + e'}.$$

820. Die Sehne durch den Brennpunkt schneide die Ellipse in den Punkten (x', y') , (x'', y'') . Da die Punkte $(c, 0)$, (x', y') , (x'', y'') in einer geraden Linie liegen, so ist $x''y' - x'y'' = c(y' - y'')$. Weil (x', y') , (x'', y'') auf der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ liegen, so hat man:

$$x'^2 y''^2 - y'^2 x''^2 = b^2 (x'^2 - x''^2) = -a^2 (y'^2 - y''^2).$$

Es ist also $a(y' + y'') = e(x'y'' + x''y')$ oder

$$\frac{y'}{a - ex'} + \frac{y''}{a - ex''} = 0.$$

Da aber $\frac{y'}{y''} = \frac{x' - c}{x'' - c}$, so folgt aus der letzten Formel

$$\frac{x' - c}{a - ex'} + \frac{x'' - c}{a - ex''} = 0,$$

oder

$$2ex'x'' - (a + ce)(x' + x'') + 2ac = 0.$$

Nach Aufg. 805 sind die Koordinaten der Schnittpunkte der Normalen:

$$x = e^2 x' x'' \frac{x' y'' + y' x''}{a^2 (y' + y'')}, \quad y = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y' y'' \frac{x' y'' + y' y''}{x' + x''}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man als Gleichung des Ortes:

$$a^2 b^2 (x + c)^2 + (a^2 + c^2) y^2 = b^2 c (a^2 + c^2) (x + c).$$

821. Es ist $\cos \varphi = \frac{PF^2 + PF'^2 - 4a^2}{2PF \cdot PF'}$. Denn ist $FT \perp TP$, $F'T' \perp TP$, $Ft \perp Pt$, $F't' \perp Pt$, so ist nach Aufg. 775, 776 $\sin TPF \cdot \sin tPF = \frac{FT}{PF} \cdot \frac{F'T'}{PF'}$; ferner ist

$$4c^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 + 2\varrho\varrho' \cos FPF',$$

$$\cos FPF' - \cos TPt = 2 \sin TPF \cdot \sin tPF.$$

822. Man beachte $FT = \frac{b}{D} FM$, $F't' = \frac{b}{D'} F'M'$, wenn M und M' die Berührungspunkte sind, und ebenso

$$Ft = \frac{b}{D'} FM', \quad F'T' = \frac{b}{D} F'M.$$

823, 824. Die Gleichung der Kurve sei in Polarkoordinaten

$$\varrho^2 (a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta) + 2(a_{13} \cos \vartheta + a_{23} \sin \vartheta) \varrho + a_{33} = 0.$$

Es ist

$$OM \cdot OM' = \frac{a_{33}}{a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta},$$

$$OM + OM' = - \frac{a_{13} \cos \vartheta + a_{23} \sin \vartheta}{a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta}.$$

Die Tangenten von O an den Kegelschnitt haben die Gleichung

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x^2 + 2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})xy + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)y^2 = 0.$$

Sind die geraden Linien OM , ON gegen diese Tangenten gleich geneigt, d. h. es gehen OM , ON durch die Brennpunkte oder sie sind Tangenten an einen konfokalen Kegelschnitt, so hat

$$(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)\cos^2\vartheta + 2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})\cos\vartheta\sin\vartheta + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\sin^2\vartheta$$

denselben Wert für die beiden Winkel MOX , NOX . Hieraus folgt der Satz 824 und dass die einen konfokalen Kegelschnitt berührenden Sehnen den Quadraten der parallelen Durchmesser proportional sind.

Die Gleichung der Sehne der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist

$$\frac{x' + x''}{a^2}x + \frac{y' + y''}{b^2}y = \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + 1.$$

Die Bedingung, dass diese Sehne Tangente an die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2 - m^2} + \frac{y^2}{b^2 - m^2} = 1$$

ist, ist

$$\frac{a^2 - m^2}{a^2} \left(\frac{x'}{a} + \frac{x''}{a} \right)^2 + \frac{b^2 - m^2}{b^2} \left(\frac{y'}{b} + \frac{y''}{b} \right)^2 = \left(\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + 1 \right)^2.$$

Setzt man

$$\frac{x'}{a} = \cos\alpha, \frac{y'}{b} = \sin\alpha, \frac{x''}{a} = \cos\beta, \frac{y''}{b} = \sin\beta,$$

so ist die Bedingung

$$b^2(a^2 - m^2)\cos^2\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + a^2(b^2 - m^2)\sin^2\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = a^2b^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

oder

$$a^2b^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = m^2 \left\{ b^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + a^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right\}.$$

Die Länge der Sehne ist

$$D = \{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2\}^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$D = \{a^2 (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + b^2 (\sin \alpha - \sin \beta)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \left\{ a^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + b^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist also

$$D \cdot ab = 2m \left(a^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + b^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right).$$

Die Gleichung der Sehne ist, durch α, β bestimmt:

$$\frac{x}{a} \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + \frac{y}{b} \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$$

Die Gleichung einer Tangente an die Ellipse ist $\frac{xx'''}{a^2} + \frac{yy'''}{b^2} = 1$; setzt man $x''' = a \cos \varphi$, $y''' = b \sin \varphi$, so ist die Gleichung der Tangente $\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi = 1$. Ist $\varphi = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$, so ist die Tangente der Sehne parallel. Verbindet man also den Mittelpunkt der Ellipse mit dem Berührungspunkt (x''', y''') $\left(\frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right)$, so ist dieser Durchmesser dem der Sehne parallel gezogenen Durchmesser konjugiert. Die Länge des durch (x''', y''') gehenden Halbdurchmessers ist $\sqrt{\left\{ a^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + b^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right\}}$, also ist die Länge des der Sehne parallelen Halbdurchmessers:

$$b_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - a^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) - b^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

$$= \sqrt{a^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + b^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}.$$

Daher ist $D = 2mb_1^2 : ab$.

825. Beschreibt man einen Kreis über der grossen Axe $A'CA$ als Durchmesser, verlängert man die Ordinate des Punktes P ($x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$) bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in Q , so ist der Winkel QCA gleich φ .

826. Es sei C der Mittelpunkt der Ellipse; man beschreibe einen Kreis über der grossen Axe als Durchmesser, man verlängere die Ordinate des gegebenen Punktes P bis zum Durchschnitt Q mit dem Kreise, ziehe CQ und errichte CQ' senk-

recht auf CQ , von dem Punkte Q' des Kreises fälle man die Senkrechte $Q'M'$ auf die grosse Axe der Ellipse, so ist der Schnittpunkt P' der Ellipse mit der geraden Linie $Q'M'$ ein Punkt, welcher dem gesuchten konjugierten Durchmesser angehört. Sind nämlich α, β die Winkel, welche die konjugierten Durchmesser mit der grossen Axe bilden, so ist $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2}$; ferner ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y''}{x''} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi',$$

also $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi' = -1$ oder $\varphi - \varphi' = 90$.

$$827. \quad \frac{x}{a} \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + \frac{y}{b} \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi').$$

$$828. \quad \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi = 1.$$

829. Nach Aufl. 823, 824 ist:

$$\begin{aligned} D &= 2 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') \sqrt{a^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + b^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')} \\ &= 2b_1 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

830. Der Inhalt des Dreiecks ist:

$$2ab \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') \sin \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi'') \sin \frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi),$$

$R = r_1 r_2 r_3 : ab$, wenn r_1, r_2, r_3 die den Seiten parallelen Halbdurchmesser sind.

831. Der Inhalt des Dreiecks ist:

$$ab \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi'') \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi).$$

832. Wenn A, B zwei Punkte einer Ellipse, C der Pol der Sehne AB und O der Mittelpunkt der Ellipse sind, so ist $\triangle OAC = \triangle OBC$. Sind die Koordinaten von A : $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, von B : $x = a \cos \psi$, $y = b \sin \psi$, so sind die Koordinaten von C :

$$\begin{aligned} x &= a (\sin \varphi - \sin \psi) : \sin(\varphi - \psi), \\ y &= b (\cos \psi - \cos \varphi) : \sin(\varphi - \psi). \end{aligned}$$

Nach Aufg. 66 findet man, dass $\triangle OAC = \triangle OBC$.

833. Siehe Aufg. 826.

834. Der Ort des Punktes R ist eine Ellipse, welcher C und F zu Brennpunkten hat. Die Polargleichung der Ellipse mit dem Punkte C als Pol ist:

$$\varrho = \frac{bc}{c + (a - b) \cos \varphi}.$$

835. Die Gleichung des Ortes von N ist: $\varrho = a + b$.

836. Der Ort ist die Tangente am andern Scheitel der Ellipse.

837. Wenn man den Punkt O zum Koordinatenursprung nimmt, so ist die Gleichung der Ellipse:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

und in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} &\varrho^2 (a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) \\ &+ 2\varrho (a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi) + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung des Ortes von Q ist daher:

$$\begin{aligned} &\varrho^2 (a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) \\ &+ 2\varrho (a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi) m + a_{33} m^2 = 0 \end{aligned}$$

oder

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0.$$

Es ist der Ort von Q eine der gegebenen Ellipse ähnlich und ähnlich gelegene Ellipse. Die Schnittpunkte beider Ellipsen liegen auf der geraden Linie

$$2(a_{13} - a'_{13})x + 2(a_{23} - a'_{23})y + a_{33} - a'_{33} = 0.$$

838. Siehe Aufg. 719. Dass die Excentricität bei beiden Ellipsen gleich ist, folgt aus

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{m^2 a^2 - m^2 b^2}{m^2 a^2}.$$

839, 840. Siehe Aufg. 423, 424.

841. Die Gleichungen der zwei Ellipsen in Bezug auf konjugierte Durchmesser sind:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{ma^2} + \frac{y^2}{mb^2} = 1.$$

Die gerade Linie $y = n$ schneidet die Ellipsen in den Punkten:

$$E : x_1 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2}, \quad F : x'_1 = -\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - n^2},$$

$$G : x_2 = \frac{a}{b} \sqrt{mb^2 - n^2}, \quad H : x'_2 = -\frac{a}{b} \sqrt{mb^2 - n^2}.$$

Es ist

$$EG = x_1 - x_2 = -(x'_1 - x'_2) = HF.$$

Da man zur Axe der y jede beliebige gerade Linie durch den Mittelpunkt nehmen kann, so ist der Satz allgemein bewiesen.

842. Die Gleichungen der zwei Ellipsen in Bezug auf die Axen sind

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{ma^2} + \frac{y^2}{mb^2} = 1.$$

Die gerade Linie $x = a$ schneidet die äussere Ellipse in den Punkten $(a, b\sqrt{m-1})$, $(a, -b\sqrt{m-1})$. Die gerade Linie $x = a + ny$ schneidet die innere Ellipse in den Punkten

$$(a, 0), \quad \left(\frac{a(a^2 - n^2b^2)}{a^2 + n^2b^2}, -\frac{2nab^2}{n^2b^2 + a^2} \right).$$

Die durch P und P_1 der geraden Linie $x = a + ny$ parallel gezogenen geraden Linien haben die Gleichungen

$$x = a - nb\sqrt{m-1} + ny, \quad x = a + nb\sqrt{m-1} + ny;$$

bestimmt man die Schnittpunkte dieser geraden Linien mit der äusseren Ellipse, berechnet man die Länge der resp. Sehnen, so ergibt sich einfach die Richtigkeit des Satzes.

843. Siehe Aufg. 720.

844—846. Siehe Aufg. 714—717. Die Gleichungen

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \\ a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0$$

stellen zwei Kegelschnitte dar, welche sich im Ursprung der Koordinaten berühren. Die Durchschnittspunkte liegen auf dem Orte

$$x\{(a_{11}a'_{22} - a'_{11}a_{22})x + 2(a_{12}a'_{22} - a'_{12}a_{22})y + 2(a_{13}a'_{22} - a'_{13}a_{22})\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt die gemeinschaftliche Tangente $x = 0$ und die den Kegelschnitten gemeinschaftliche Sehne,

welche nicht durch den Ursprung geht, dar. Wenn aber $a_{13}a'_{22} = a'_{13}a_{22}$ ist, so geht die Sehne durch den Ursprung; ist ferner $a_{12}a'_{22} = a'_{12}a_{22}$, so fällt die Sehne mit der Tangente $x = 0$ zusammen.

Die Hyperbel.

847, 848. Die auf die Axen bezogene Gleichung der Hyperbel ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Die Axe der y schneidet die Hyperbel nicht, weil man die Gleichung $y^2 = -b^2$ zur Bestimmung der Schnittpunkte erhält. Die Strecke b trägt man auf der Axe der y ab. Erhält man bei den Untersuchungen für die Länge eines Durchmessers der Hyperbel einen imaginären Wert $m\sqrt{-1}$, so nimmt man die Länge m und bezeichnet den Durchmesser mit der Länge m als einen Durchmesser der Hyperbel.

Bilden zwei konjugierte Durchmesser mit der Axe der x die Winkel φ, ψ , so ist $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2}$; die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf diese Durchmesser ist

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad A^2 - B^2 = a^2 - b^2, \quad AB \sin(\psi - \varphi) = ab.$$

(Siehe Aufg. 736–740.)

849. Die Gleichungen der Axen sind:

$$1, 2) \ x^2 = y^2, \quad 3, 5, 6) \ x = 0, \ y = 0, \quad 4) \ 3x^2 - 4xy = 3y^2.$$

Nimmt man die Hauptaxe der Hyperbel zur Axe der x , so sind die auf die Axen bezogenen Gleichungen:

$$1) \ 3x^2 - y^2 = 8, \quad 2) \ x^2 - y^2 = 2, \quad 4) \ (\sqrt{13} - 1)x^2 - (\sqrt{13} + 1)y^2 = 5.$$

Bildet ein Durchmesser mit der Hauptaxe den Winkel $\varphi = 18^\circ, 30^\circ, 60^\circ$, so schliesst der mit ihm konjugierte Durchmesser mit der Hauptaxe einen Winkel ψ ein, der gegeben

$$\text{ist durch die Relation } \operatorname{tg} \psi = \frac{B}{A} \cotg \varphi, \quad \frac{B}{A} = 3, 1, 1, \frac{\sqrt{13} - 1}{\sqrt{13} + 1}, \frac{5}{7}, 8;$$

$$\cotg \varphi = \cotg 18^\circ, \sqrt{3}, \frac{1}{3} \sqrt{3}.$$

850. Die zu den Axen transformierten Gleichungen sind:

$$1) \quad (1 - \cos \alpha) x^2 - (1 + \cos \alpha) y^2 = 16 \sin^2 \alpha;$$

$$2) \quad (1 + \sqrt{1 + 63 \sin^2 \alpha}) x^2 - (\sqrt{1 + 63 \sin^2 \alpha} - 1) y^2 = 3 \sin^2 \alpha.$$

$$3) \quad \left(\frac{1}{2} - \cos \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{5 + 8 \sin^2 \alpha - 4 \cos \alpha} \right) x^2 \\ - \left(-\frac{1}{2} + \cos \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{5 + 8 \sin^2 \alpha - 4 \cos \alpha} \right) y^2 = 10 \sin^2 \alpha;$$

$$4) \quad (1 + \sqrt{1 + 35 \sin^2 \alpha}) x^2 - (\sqrt{1 + 35 \sin^2 \alpha} - 1) y^2 = 25 \sin^2 \alpha;$$

$$5) \quad x^2 - y^2 = \sin^2 \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ und } \sin^2 \alpha = \frac{16}{25},$$

$$\alpha = 18^\circ, \quad = 35^\circ.$$

Bringt man diese Gleichungen auf die Form $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, so sind die Gleichungen der Hyperbeln bezogen auf konjugierte Durchmesser, von denen der eine mit der Hauptaxe den Winkel $\beta = 15^\circ, 20^\circ, 18^\circ$ einschliesslich von der Form

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad A^2 - B^2 = a^2 - b^2, \quad AB \sin(\gamma - \beta) = ab, \quad \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = \frac{B^2}{A^2}.$$

851, 852. Setzt man in der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = \varrho \cos \vartheta; \quad y = \varrho \sin \vartheta, \quad e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2},$$

so ist

$$\varrho = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \vartheta - 1}.$$

853, 854. Siehe Aufg. 744, 745, 847, 848.

755. Die Gleichung der Sehne ist

$$\frac{x' + x''}{a^2} x - \frac{y' + y''}{b^2} y = \frac{x' x''}{a^2} - \frac{y' y''}{b^2} + 1;$$

die Gleichung der Tangente ist

$$\frac{x x'}{a^2} - \frac{y y'}{b^2} = 1.$$

$$\mathbf{856.} \quad x - \sqrt{2} y = 1. \quad \mathbf{857.} \quad 7x + 4\sqrt{3} y + 1 =$$

858. Die Gleichung der durch den Punkt x', y' gehenden Tangenten ist

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2.$$

859. Wenn die Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, so ist die Gleichung der Polaren von x', y' $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1$. Der Pol der geraden Linie $mx + ny = 1$ ist $x = a^2m, y = -b^2n$.

860. $a^2m^2 - b^2n^2 = 1$.

861, 862. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2ab \left\{ -\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}}}{x'^2 + y'^2 - a^2 + b^2}$. Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ die Gleichung des Ortes der Aufg. 862.

863, 864. $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{x'} = \frac{b^2}{a^2} \cotg 4$.

Die Endpunkte der beiden konjugierten Durchmesser erhält man resp. aus den Gleichungen $xy' = yx', \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, und $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

865—867. Es seien a', b' die Längen von zwei konjugierten Halbdurchmessern, x', y' seien die Koordinaten des Endpunktes von a' und x'', y'' die Koordinaten des Endpunktes von b' . Die Gleichung des Durchmessers $2b$ ist $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0$, also ist $a^2y''^2 + x'^2b^2 = 0, b^2x''^2 + y'^2a^2 = 0$. Ferner ist:

$$a'^2 = x'^2 + y'^2 = x'^2 + b^2 \left(\frac{x'^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x'^2 - b^2 = e^2 x'^2 - b^2.$$

Ebenso ist:

$$b'^2 = x''^2 + y''^2 = -\frac{a^2}{b^2} y'^2 - \frac{b^2}{a^2} x'^2 = a^2 - x'^2 - \frac{b^2}{a^2} x'^2 = a^2 - e^2 x'^2.$$

Nach der Lösung der Aufg. 847, 848 nimmt man die Strecke

$$b' = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2}.$$

Ist φ der Winkel zwischen a und b , so ist $a'b' \sin \varphi = ab$.

868. Die Gleichung der Hyperbel sei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, die Gleichung einer Tangente $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1$ oder $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

Es ist also $\frac{x'}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}$, $\frac{y'}{b^2} = -\frac{\sin \alpha}{p}$; hieraus folgt:

$$1) \quad p^2 = a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha.$$

Die Gleichung der Tangente ist also:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Die Entfernung irgend eines Punktes x'', y'' von der Tangente ist $\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha} - x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$.

$$2) \quad p^2 = \frac{a^2 b^2}{\frac{b^2 x'^2}{a^2} + \frac{y'^2 a^2}{b^2}} = \frac{a^2 b^2}{-b'^2}, \quad p = \frac{ab}{b'}.$$

869, 870. Setze einfach in Aufg. 763 statt b^2 die Grösse $-b^2$.

871, 872. Siehe Aufg. 767. 873. Siehe Aufg. 768.

874. Siehe Aufg. 769. Sind AB und CD konjugierte Durchmesser einer Hyperbel, und werden die geraden Linien AD , BC und der zu ihnen parallele Durchmesser EOG durch beliebige zu CD Parallele resp in M , N und L geschnitten, so treffen sich AN und BM in einem Hyperbelpunkte P , dessen Tangente durch L geht.

Die Gleichung für BC ist $ay + bx = ab$, für EOG ist $ay + bx = 0$, für AD ist $ay + bx = -ab$.

Wenn $x = OQ = m$ ist, so hat man

$$QN = \frac{b}{a}(a - m), \quad QL = -\frac{b}{a}m, \quad QM = -\frac{b}{a}(a + m),$$

und für AN die Gleichung:

$$\frac{y}{a+x} = \frac{b(a+m)}{a(a+m)}$$

für BM :

$$\frac{y}{a-x} = \frac{b(a+b)}{a(m-a)}.$$

Diese geraden Linien schneiden sich im Punkte P :

$$x = \frac{a^2 + m^2}{2m}, \quad y = \frac{b(a^2 - m^2)}{2am},$$

welcher auf der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ liegt.

Die Gleichung der Tangente im Punkte P :

$$b(a^2 + m^2)x - a(a^2 - m^2)y = 2a^2bm$$

wird identisch für $x = m, y = -\frac{b}{a}m$, d. h. diese Tangente geht durch den Punkt L .

875–895. Diese Aufgaben folgen aus den Aufg. 771–791, indem man $-b^2$ statt b^2 setzt.

$$\text{896.} \quad \varrho = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 - e \cos \vartheta} = \frac{p}{2} \frac{1}{1 - e \cos \vartheta}.$$

$$\text{897.} \quad y^2 = px + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

898. Die Aufg. 793–797 gelten für die Hyperbel.

899. Die Gleichung der Normalen der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist $a^2xy' + b^2x'y = (a^2 + b^2)x'y'$. Die Länge der Normalen zwischen Fusspunkt und Schnittpunkt mit der Hauptaxe ist:
 $\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2}{b^2}y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2} = \frac{bb'}{a}$. (Siehe Aufg. 799, 800.)

900. Ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Hyperbel, so hat die Normale im Punkte x'', y'' die Gleichung:

$$a^2xy'' + b^2x''y = (a^2 + b^2)x''y''.$$

Liegt der Punkt x', y' auf dieser Normalen, so kann man von diesem Punkte vier Normalen an die Hyperbel ziehen, welche durch die Schnittpunkte der gegebenen Hyperbel mit der Hyperbel $a^2x'y + b^2xy' = c^2xy$ gehen.

901. Siehe Aufg. 803.

902, 903 Die Tangenten schneiden sich im Punkte

$$x_t = \frac{a^2(n - q)}{np - mq}, \quad y_t = \frac{b^2(m - p)}{np - mq}.$$

Die Normalen schneiden sich im Punkte

$$x_n = \frac{a^2 + b^2}{a^4} mp x_t, \quad y_n = - \frac{a^2 + b^2}{b^4} nq y_t.$$

Es ist ferner

$$x_t = \frac{np + mq}{n + q}, \quad y_t = \frac{np + mq}{m + p}.$$

Setzt man $m = p$, $n = q$, so sind die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$x_r = \frac{a^2 + b^2}{a^4} m^3, \quad y_r = - \frac{a^2 + b^2}{b^4} n^3.$$

Der Tangente in (m, n) ist der Durchmesser parallel, dessen halbe Länge gleich

$$b' = \sqrt{-a^2 + e^2 m^2} = \sqrt{b^2 + \frac{c^2 n^2}{b^2}}$$

ist. Man kann also setzen:

$$x_r = \frac{a^2 + b'^2}{a^2} m, \quad y_r = \frac{b^2 - b'^2}{b^2} n, \quad r = b'^2 \sqrt{\frac{m^2}{a^4} + \frac{n^2}{b^4}} = \frac{b'^3}{ab} = \frac{b'^2}{d}.$$

904, 905. Siehe Aufg. 807, 808.

906. Der Krümmungsradius im Scheitel ist nach Aufg. 903:

$r_1 = \frac{b^2}{a}$, es ist $PN = \frac{bb'}{a}$, also $r = \frac{PN^3}{b^4} a^2 = \frac{PN^3}{r_1^2}$. Der Durchmesser von der Grösse des halben Parameters r_1 geht durch den Punkt $x = b$, $y = \frac{b}{a} \sqrt{b^2 - a^2}$ der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

907. Benutzt man die Bezeichnung der Aufg. 902, 903, so ist die Länge der Sehne:

$$1) \frac{2b'^2}{a'}, \quad 2) \frac{2b'^2}{a}.$$

908. Man ziehe in dem Kegelschnitt mit dem Brennpunkte F eine Sehne AB parallel zu der Tangente im Punkte M und beschreibe durch die Punkte ABM einen Kreis. Die Brennpunktssehne parallel AB schneide den Kegelschnitt in C und D , und die Brennpunktssehne MF schneide den Kegel-

schnitt in E und den Kreis in G und die Sehne AB in H . Es ist $MH \cdot HG = AH \cdot HB$ und

$$\frac{MH \cdot HE}{AH \cdot HB} = \frac{ME}{CD},$$

also $HG : HE = CD : ME$. Für den Krümmungskreis fallen aber H und M zusammen, also ist $MG = CD$.

909. Nach Aufg. 809 ist die Gleichung der Evolute der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ von der Form:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad A = \frac{c^2}{a}, \quad B = \frac{c^2}{b}, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

910–912. Diese Sätze gelten sowohl für Ellipse als Hyperbel.

913. Die konjugierten Hyperbeln haben dieselben Asymptoten, deren Gleichungen sind:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \frac{x}{a} = -\frac{y}{b};$$

die Gleichung des Asymptotenpaares ist:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}.$$

914. Die Winkel, welche die Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der Axe der x einschliessen, sind bestimmt durch:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 = -\frac{b}{a}.$$

Es ist

$$\cos \vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{e}.$$

Der Winkel zwischen den Asymptoten ist gleich $\vartheta - \vartheta_1$, also:

$$\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_1) = \frac{2 \frac{b}{a}}{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Es ist aber:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 \frac{b}{a}}{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = 2\vartheta, \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e}.$$

915. Wenn die auf die Axen bezogene Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, so ist die auf die Asymptoten bezogene Gleichung $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

916. Wenn die auf zwei konjugierte Durchmesser bezogene Gleichung $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ ist, so sind die Gleichungen der Asymptoten $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 0$, $\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = 0$; hieraus folgt leicht der Satz.

917. Nach Aufg. 916 folgt aus der Gleichung der Asymptoten $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 0$ für $x = m$ der Wert, $y = \pm n$. Da aber die Tangente in m dem konjugierten Durchmesser parallel ist, so ist hiermit der Satz bewiesen.

918. Die Koordinatenaxen seien zwei konjugierte Durchmesser, die Axe der y sei der geraden Linie $D_1 D_2$ parallel; die Gerade $D_1 D_2$ schneide die Axe der x in M . Es ist die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$$

und die Gleichung der Asymptoten

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 0.$$

Es ist

$$D'_1 M = M D'_2 = \pm \frac{n}{m} x, \quad D_1 M = D_2 M = \pm n \sqrt{\frac{x^2}{m^2} - 1},$$

also

$$D_1 D'_1 = D_2 D'_2 = n \left\{ \frac{x}{m} - \sqrt{\frac{x^2}{m^2} - 1} \right\},$$

$$D'_1 D_2 = D_1 D'_2 = n \left\{ \frac{x}{m} + \sqrt{\frac{x^2}{m^2} - 1} \right\}.$$

919. Folgt aus der Gleichung 915.

920. Wenn die Asymptotengleichung der Hyperbel $xy = k^2$ ist, so ist die Gleichung der Tangente in $E(x', y')$ $\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 2$; es ist also $OF_1 = 2x'$, $OG_1 = 2y'$ und der doppelte Inhalt

des Dreiecks OG_1F_1 gleich $4x'y' \sin F_1OG_1 = 4k^2 \sin F_1OG_1 = \text{konstant}$.

921. Die Asymptotengleichung der Hyperbel sei $xy = k^2$; die Gleichung der durch die Punkte (x', y') , (x'', y'') gehenden geraden Linie ist $x''y + y'x = y'x'' + k^2$ und die Gleichung der durch die Punkte (x'', y'') , (x''', y''') gehenden geraden Linie ist $x'''y + y''x = y''x''' + k^2$. Die eine dieser geraden Linie schneidet die Axe der x im Punkte $P (x''' + x', 0)$ und die andere gerade Linie schneidet die Axe der x im Punkte $Q (x''' + x'', 0)$, also ist $PQ = x' - x''$.

$$\mathbf{922.} \quad k = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

923. Die Länge der Senkrechten vom Brennpunkte auf die Asymptote ist gleich der halben Nebenaxe.

924. Folgt einfach aus der Definition der Direktrix und Brennpunkten.

925. Die Asymptoten stehen aufeinander senkrecht.

926. Die Gleichungen der Kegelschnitte sind

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Winkel, welche die Asymptoten mit der Axe der x einschliessen, sind bestimmt durch $\text{tg } \varphi = \pm \frac{b}{a}$. Die Länge der gleichen konjugierten Durchmesser findet man, indem man $a' = b'$ in die Gleichung $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ setzt; also $a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Wenn ψ , ψ_1 die Winkel sind, welche die konjugierten Durchmesser mit der positiven Axe der x bilden, so ist

$$\text{tg } \psi \cdot \psi_1 = -\frac{b^2}{a^2}, \quad a'^2 \sin (\psi - \psi_1) = ab;$$

hieraus folgt $\text{tg } \psi = -\text{tg } \psi_1 = \frac{b}{a}$.

927. Es sei $ACB = \alpha$ der gegebene Winkel, $AC = BC = r$; die Axe der x sei AC und C sei der Koordinatenursprung; B habe die Koordinaten x' , y' und der Punkt $F (x, y)$ sei so bestimmt, dass $ACF = \frac{\alpha}{3}$, $FC = AC$ ist.

Es ist

$$x' = r \cos \alpha, \quad y' = r \sin \alpha; \quad x = r \cos \frac{\alpha}{3}, \quad y = r \sin \frac{\alpha}{3};$$

man hat

$$r^2 \sin \frac{2\alpha}{3} = r^2 \sin \left(\alpha - \frac{\alpha}{3} \right) = r \sin \alpha \cdot r \cos \frac{\alpha}{3} - r \cos \alpha \cdot r \sin \frac{\alpha}{3}$$

oder $2xy = xy' - yx'$. Es ist also der Punkt F der Schnittpunkt des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ und der Hyperbel $2xy = xy' - yx'$.

Setzt man $x - \frac{x'}{2}$ statt x , $-y + \frac{1}{2}y'$ statt y , so ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $xy = \frac{1}{4}x'y'$.

928. Siehe Aufg. 377.

929. Wenn die Gleichungen der beiden Kreise

$$(x + \alpha)^2 + y^2 = r^2, \quad (x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$$

sind, so ist, jenachdem der bewegliche Kreis diese Kreise berührt, die Gleichung des Ortes

$$(x + \alpha)^2 + y^2 = \left(\frac{2\alpha x}{r \pm r_1} + \frac{r \pm r_1}{2} \right)^2.$$

Berührt ein Kreis den gegebenen Kreis $(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$ und die gerade Linie $x = 0$, so hat der Ort des Mittelpunktes die Gleichung $y^2 + \alpha^2 = 2x(\alpha + r)$, also eine Parabel.

930. Wenn die Ecken des Dreiecks die Koordinaten $(0, y')$, $(x'', 0)$, $(x''', 0)$ haben, so sind die Koordinaten des Höhenschnittpunktes (Aufg. 80) $\left(0, -\frac{x''x'''}{y'} \right)$.

Nach Aufg. 621 ist die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes, welcher durch die Ecken des Dreiecks geht:

$$y_1 y' x^2 + 2p x y + x'' \cdot x''' y^2 - y_1 y' (x'' + x''') x - x'' x''' (y_1 + y') y + x'' x''' y_1 y = 0.$$

Damit dieser Kegelschnitt durch den Höhenschnittpunkt geht, muss $y = -\frac{x''x'''}{y'}$ der Gleichung $y^2 - (y_1 + y') y + y_1 y' = 0$

genügen. Es ist also $\left(\frac{x''x'''}{y'y_1} + 1 \right) \left(\frac{x''x'''}{y'} + y' \right) = 0$. Da das Dreieck ganz beliebig ist, so ist $x''x''' = -y'y_1$, d. h. der Kegelschnitt ist eine gleichseitige Hyperbel.

931. Aus der Aufg. 930 folgen die Koordinaten des Mittelpunktes:

$$x = \frac{x''x''' - y_1y'(x'' + x''') + p(y_1 + y')}{2p^2 - y_1y'x''x'''},$$

$$y = \frac{y_1y' - x''x'''(y_1 + y') + p(x'' + x''')}{2p^2 - y_1y'x''x'''}$$

Setzt man $x''x''' = -y'y_1$, eliminiert man p , so erhält man die Gleichung eines Kreises, welcher durch die Seitenmittelpunkte des Dreiecks geht.

932 Nach Aufg. 618 ist die Gleichung des Kreises, welcher durch den Pol jeder Axe und den Ursprung geht:

$$a_{12}(x^2 + 2xy \cos \varphi + y^2) + a_{23}x + a_{13}y = 0.$$

Ist $a_{11} + a_{22} = 2a_{12} \cos \varphi$, so ist der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, durch deren Centrum der Kreis geht.

933. Die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte $(0, 0)$, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) geht, ist:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Hyperbel hat die Gleichung $x^2 - y^2 = r^2$. Die beiden Linien

$xx_1 - yy_1 = x_2x_1 - y_2y_1 = a$, $xx_2 - yy_2 = x_2x_1 - y_2y_1 = a$ schneiden sich auf dem Kreise.

934. Dieser Satz folgt aus Aufg. 932, 622.

935. Der Mittelpunkt der Hyperbel sei O , der Punkt $M(a \sec \varphi, b \operatorname{tg} \varphi)$ habe die Ordinate MP ; zieht man vom Fusspunkt der Ordinate der Hyperbel eine Tangente PT an den über der Hauptaxe beschriebenen Kreis, so ist:

$$\sphericalangle MPT = \sphericalangle TCP = 1R - \sphericalangle TPC = \varphi, \quad OP = OT \sec \varphi,$$

$$PT = a \operatorname{tg} \varphi, \quad MP = b \operatorname{tg} \varphi.$$

$$\mathbf{936.} \quad a' = \sqrt{a^2 \sec^2 \varphi + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad b' = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \sec^2 \varphi}.$$

$$\mathbf{937.} \quad \frac{x}{a} \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') - \frac{y}{b} \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi').$$

Die Gleichung der Tangente ist:

$$\frac{x}{a} \sec \varphi - \frac{y}{b} \operatorname{tg} \varphi = 1.$$

938. Folgt leicht aus Aufg. 936.

939. Wenn zwei Hyperbeln parallele Asymptoten haben, so sind auch ihre Axen parallel und die Excentricität hängt von dem Winkel ab, den die Asymptoten bilden.

940. Die Gleichungen von zwei gleichseitigen konzentrischen Hyperbeln sind:

$$x^2 - y^2 = r^2, \quad x^2 \cos 2\alpha - 2xy \sin 2\alpha - y^2 \cos 2\alpha = r_1^2,$$

wenn α der Winkel zwischen den Asymptoten ist. Die Gleichungen der Tangenten im Schnittpunkte der Hyperbeln sind:

$$xx' - yy' = r^2,$$

$$x(x' \cos 2\alpha - y' \sin 2\alpha) - y(x' \sin 2\alpha + y' \cos 2\alpha) = r_1^2.$$

Diese beiden geraden Linien bilden einen Winkel, dessen Sinus gleich $\sin 2\alpha$, dessen Cosinus gleich $\cos 2\alpha$ ist, also ist dieser Winkel doppelt so gross, als der Winkel ihrer Asymptoten.

Es seien OA, OB und OA', OB' die Asymptoten der beiden Hyperbeln; P der Schnittpunkt dieser Hyperbeln; PA, PA' die Richtungen der Tangenten in P , welche die Asymptoten in A, A' schneiden; der Winkel $A'OA$ sei ein spitzer Winkel. Man sieht leicht ein, dass ist $PO = PA = PA'$. Die Punkte O, A, A' liegen auf einem Kreise mit dem Centrum P . Der Winkel APA' hat zum Mass den Bogen AA' , während der Winkel AOA' zum Mass den Bogen $\frac{1}{2} AA'$ hat.

Es ist also $\sphericalangle APA' = 2 \sphericalangle AOA'$.

941—952. Die Gleichung eines Kegelschnittes in Bezug auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem ist:

$$a_1 x^2 + 2b_1 xy + c_1 y^2 = d.$$

Der Punkt C beschreibe die gerade Linie $x = l$ und eine gerade Linie parallel der Axe der x schneide den Kegelschnitt in M, N . Da der Punkt P nicht mit C zusammenfallen soll, so liegen die Punkte M, N, C, P harmonisch. Die Koordinaten der Punkte seien $M(x_1, y), N(x_2, y), P(x, y), C(b, y)$.

Es ist:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b_1 y}{a_1}, \quad x_1 x_2 = \frac{c_1 y^2 - d}{a_1}$$

und

$$lx - \frac{1}{2}(l + x)(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0,$$

also $a_1 l x + b_1 y (l + x) + c_1 y^2 = d$, d. h. der Punkt P beschreibt einen Kegelschnitt.

Sind die Koordinatenachsen aufeinander senkrecht, setzt man $b_1 = 0$ und $\frac{d}{a^2}$ statt a_1 und $\frac{d}{\pm b^2}$ statt c_1 und c statt l , so ist die Gleichung des Ortes der Aufg. 941, 942:

$$\frac{cx}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

In Aufg. 945 ist $c = 0$ und der Ort von P ist die unendlich ferne gerade Linie.

Beschreibt in der allgemeinen Aufgabe der Punkt C die gerade Linie $y = l$ und schneidet eine gerade Linie parallel der Axe der y den Kegelschnitt in M, N , so ist der Ort von P :

$$c_1 l y + b_1 x (l + y) + a_1 x^2 = d.$$

Setzt man $b_1 = 0$, $\frac{d}{a^2}$ statt a_1 und $\frac{d}{\pm b^2}$ statt c_1 und c statt l , so ist die Gleichung des Ortes:

$$\frac{cy}{\pm b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Durchwandert C die Hauptaxe, so ist $c = 0$ und der Ort von P ist die unendlich ferne gerade Linie.

Setzt man l unendlich gross, so ist der Ort von P ein Durchmesser und zwar in der Aufg. 951 die Nebenaxe und in Aufg. 952 die Hauptaxe.

Der Ort von P und der gegebene Kegelschnitt schneiden sich in der geraden Linie, welche C durchläuft. Wenn die gerade Linie, welche C durchläuft, den gegebenen Kegelschnitt in L berührt, so ist sie auch in L Tangente an den Kegelschnitt P .

Die Gleichung der Hyperbel bezogen auf die Hauptaxe und eine Asymptote ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{xy}{a \sqrt{a^2 + b^2}} = 1.$$

Beschreibt der Punkt C die gerade Linie $x = l$, so ist der Ort von P :

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{y}{a \sqrt{a^2 + b^2}} (l + x) = 1.$$

Die Parabel.

953—958. Die geraden Linien

$$mx + ny = 0, \quad (n - m \cos w) x - (m - n \cos w) y = 0$$

stehen aufeinander senkrecht. Setzt man

$$r^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos w,$$

so sind die Transformationsformeln:

$$rY = (mx + ny) \sin w, \quad rX = (n - m \cos w) x - (m - n \cos w) y,$$

also:

$$rx \sin w = (m - n \cos w) Y + nX \sin w,$$

$$ry \sin w = (n - m \cos w) Y - mX \sin w.$$

Die Gleichung der Parabel ist:

$$r^3 Y^2 + 2 \sin^2 w (a_{13} n - a_{23} m) X + 2 \sin w \{ a_{13} (m - n \cos w) + a_{23} (n - m \cos w) \} Y + r a_{33} \sin^2 w = 0.$$

Verschiebt man die Koordinatenachsen parallel, so dass der neue Ursprung in Bezug auf die Axen X, Y die Koordinaten

$$Y' = - \frac{a_{13} m + a_{23} n - a_{13} n \cos w - a_{23} m \cos w}{r^3},$$

$$X' = \frac{(a_{13} m + a_{23} n - a_{13} n \cos w - a_{23} m \cos w)^2 - r^4 a_{33} \sin^2 w}{2 \sin^2 w (a_{13} n - a_{23} m) r^3}$$

hat, so ist die Gleichung der Parabel von der Form:

$$r^3 y^2 + 2 \sin^2 w (a_{13} n - a_{23} m) x = 0.$$

Der Hauptparameter ist also:

$$p = \frac{2 (a_{23} m - a_{13} n) \sin^2 w}{(m^2 + n^2 - 2mn \cos w)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Axe der y ist Tangente im Scheitel.

Ist $w = 1R$, so ist:

$$p = \frac{2 (a_{23} m - a_{13} n)}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die beiden geraden Linien

$$mx + ny = 0, \quad 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

schneiden sich in einem Punkte der Parabel

$$\alpha = \frac{a_{33} n}{2 (a_{23} m - a_{13} n)}, \quad \beta = \frac{-a_{33} m}{2 (a_{23} m - a_{13} n)}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte α, β ist

$$x [m (m\alpha + n\beta) + a_{13}] + y [n (m\alpha + n\beta) + a_{23}] + a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33} = 0,$$

oder

$$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Die gerade Linie $mx + ny = 0$ ist der durch den Punkt α, β gehende Durchmesser der Parabel und die gerade Linie $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ ist die Tangente im Punkte α, β . Verschiebt man die Koordinatenachsen parallel, so dass der Punkt α, β der neue Ursprung wird, so ist die Gleichung der Parabel $(mx + ny)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$. Transformiert man diese Gleichung zu den Axen $mx + ny = 0, a_{13}x + a_{23}y = 0$, so hat man zu setzen:

$$y \sin w = x \sin \alpha + y \sin \beta, \quad x = x \sin \alpha' + y \sin \beta'$$

(siehe Aufg. 19, 20); und es ist

$$n \sin \alpha + m \sin \alpha' = 0, \quad a_{13} \sin \beta' + a_{23} \sin \beta = 0,$$

$$\sin \alpha = \frac{m \sin w}{\sqrt{n^2 + m^2 - 2nm \cos w}},$$

$$\sin \beta = \frac{a_{13} \sin w}{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 - 2a_{13}a_{23} \cos w}}$$

(siehe Aufg. 53).

Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = p_1 x$, wenn man setzt w_1 gleich dem Winkel der neuen Axen und

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2(a_{13}^2 + a_{23}^2 - 2a_{13}a_{23} \cos w)}{\sqrt{n^2 + m^2 - 2nm \cos w} (a_{23}m - a_{13}n)} \\ &= \frac{2(ma_{23} - na_{13}) \sin^2 w}{(m^2 + n^2 - 2mn \cos w)^{\frac{3}{2}} \sin^2 w_1}. \end{aligned}$$

Der Hauptparameter ist also gleich $p = p_1 \sin^2 w_1$. Wenn also die Parabel gegeben ist, so erhält man nach der letzten Formel einen Parameter eines Punktes P der Parabel dadurch, dass man den Hauptparameter durch das Quadrat des Sinus des Neigungswinkels der Tangente in P gegen den Durchmesser der Parabel dividiert.

959. Nach Aufg 958 genügt es, den Hauptparameter für schiefwinklige Axen zu bestimmen. Ist der Koordinatenwinkel w , so ist p gleich

$$\begin{aligned}
 1) & \frac{6 \sin^2 w}{(5 - 4 \cos w)^{\frac{3}{2}}}; & 2) & \frac{4a^2b^2 \sin^2 w}{(a^2 + b^2 + 2ab \cos w)^{\frac{3}{2}}}; \\
 3) & - \frac{9 \sin^2 w}{(10 - 6 \cos w)^{\frac{3}{2}}}; & 4) & - \frac{20 \sin^2 w}{(25 - 24 \cos w)^{\frac{3}{2}}}; \\
 5) & - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 w}{(5 - 4 \cos w)^{\frac{3}{2}}}; & 6) & 0; \quad 7) 0; \\
 8) & 18 \sin^2 w; & 9) & \frac{-5 \cos^2 \frac{w}{2}}{2 \sin \frac{w}{2}}; \\
 10) & \frac{b^2 \sin^2 w}{a}; & 11) & 0; \quad 12) 9 \sin^2 w.
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen 6, 7, 11 stellen gerade Linien dar.

960, 961. Der in Aufg. 159 gegebene Punkt ist der Brennpunkt und die gegebene gerade Linie die Direktrix der Parabel. Der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel ist gleich dem Abstand der Direktrix vom Scheitel $= \frac{p}{4}$.

962. Die grosse Axe muss unendlich gross sein.

963, 964. Die Gleichung der Sehne ist:

$$y - y' = \frac{p}{y' + y''} (x - x'),$$

also die Gleichung der Tangente $2yy' = p(x + x')$.

965. Die Gleichung des Tangentenpaares durch x', y' ist:

$$(y'^2 - px')(y^2 - px) = \left(yy' - \frac{p}{2}(x + x') \right)^2.$$

Transformiert man diese Gleichung, indem man setzt:

$$x = x + \alpha \text{ und } y = y + \beta \text{ und } \frac{p}{4} \alpha - \frac{1}{2} y' \beta + \frac{y'^2}{2} - \frac{px'}{4} = 0, \\ - \frac{1}{2} y' \alpha + x' \beta - \frac{y'x'}{2} = 0, \text{ so erhält man die Gleichung:}$$

$$\frac{p^2}{4} x^2 + px'y^2 - py'xy = 0.$$

Diese geraden Linien stehen senkrecht, wenn ist $\frac{p^2}{4} + px' = 0$, also $x' = -\frac{p}{4}$, d. h. der Punkt x', y' liegt auf der Direktrix.

966. $2yy' = p(x + x')$.

967. Die Koordinaten des Poles sind $x' = -\frac{1}{m}$, $y' = -\frac{np}{2m}$.

968. Der Punkt x', y' der Aufg. 967 liegt in diesem Falle auf der Parabel $y'^2 = px'$, also ist $n^2p + 4m = 0$.

969. Aus der Gleichung der Tangente $2yy' = p(x + x')$ ergibt sich für den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe $x = -x'$.

970. Schneidet die Tangente PN die Axe der Parabel $y^2 = px$ in N , so ist $\sphericalangle QPN = \sphericalangle FNP$. Hat P die Koordinaten x', y' , so sind nach Aufg. 969 die Koordinaten von N : $-x', 0$. Es ist also $FN^2 = \left(\frac{p}{4} + x'\right)^2$ und $FP^2 = \left(x' - \frac{p}{4}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{p}{4} + x'\right)^2$, mithin $FN = FP$; es ist daher $\sphericalangle FNP = \sphericalangle FPN = \sphericalangle QPN$.

971. $2y = y' + y''$, $px = y'y''$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2p(y' - y'')}{4y'y'' + p^2}$, $y^2 = px$ Gleichung der Parabel.

972. Es sei F der Brennpunkt, CD die Direktrix der Parabel, M der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten in P und P' . Fällt man von P und P' die Perpendikel PK, PK' auf CD , zieht $PF, P'F$, so werden die Winkel KPF und $K'P'F$ durch die Tangenten halbiert, und diese stehen senkrecht auf KF und $K'F$. Es ist demnach $MK = MF = MK'$; schlägt man um M mit MF einen Kreis, so schneidet derselbe die Direktrix in K und K' . Es ist der Winkel FMP' die Hälfte des Mittelpunktswinkels zum Bogen $K'F$, also gleich dem Peripheriewinkel $K'KF$ oder gleich Winkel KPM . Zieht man ML parallel der Axe, so ist

$$\sphericalangle KPM = \sphericalangle PML = \sphericalangle P'MF.$$

973, 974, 975. Nach der Aufg. 972 ist $\sphericalangle P'MF = \sphericalangle MPK = \sphericalangle MPF$ und $\sphericalangle PMF = \sphericalangle MP'K' = \sphericalangle MP'F$. Mithin sind auch die dritten Winkel der Dreiecke $MP'F$ und MPF , nämlich MFP und $P'FM$ einander gleich. Geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Tangenten durch den Brennpunkt, so steht die Linie, welche den Brennpunkt mit ihrem Durchschnittspunkte verbindet, senkrecht auf dieser Sehne und die Tangenten stehen aufeinander senkrecht (siehe Aufg. 965).

976. Schneidet in Aufg. 972 die gerade Linie ML die Direktrix in L und PP' in S , so ist $MK = MK'$, $ML \perp KK'$, also auch $LK = LK'$ und $PS = P'S$.

977, 978. Die Sehne schneide die Parabel in den Punkten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ; es ist die Gleichung der Sehne

$$y(y_1 + y_2) - px = y_1(y_1 + y_2) - px_1.$$

Der Durchmesser durch den Mittelpunkt der Sehne hat die Gleichung $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Die Gleichung der Tangente im Durchschnittspunkt dieses Durchmessers und der Parabel ist mithin $y(y_1 + y_2) - px = px'$; die Tangente ist also der Sehne parallel. Die Tangenten in den Endpunkten der Sehne haben die Gleichungen $2y_1y = p(x + x_1)$, $2y_2y = p(x + x_2)$. Der Durchmesser durch den Schnittpunkt dieser Tangenten hat die Gleichung $2y = p \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = y_1 + y_2$; der Durchmesser geht also durch den Mittelpunkt der Sehne. Hieraus folgt einfach Aufg. 978.

979. Wenn die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ ist, so sind die Gleichungen der Polaren der Punkte:

$$(x', y'), (x'', y'') : 2yy' = p(x + x'), 2yy'' = p(x + x'').$$

Der Abschnitt, den diese Polaren in den Axen bilden, ist gleich $x' - x''$.

980, 981. Nach Aufg. 953—958 ist $p' \sin^2 \varphi = p$.

982. Sind x', y' die Koordinaten von B , so ist (nach Aufg. 969):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{2x'} = \frac{p}{2y'}, \text{ also } \sin^2 \varphi = \frac{p^2}{p^2 + 4y'^2} = \frac{p}{p + 4x'}$$

und $p' = p + 4x'$.

983. Die Gleichung der Normalen ist

$$p(y - y') + 2y'(x - x') = 0.$$

984. Der von der Normale in der Axe gebildete Abschnitt ist $x' + \frac{p}{2}$ und die Subnormale ist gleich $x' + \frac{p}{2} - x' = \frac{p}{2}$.

985, 986. Die Entfernung des Brennpunktes vom Punkte x', y' der Parabel $y^2 = px$ ist $\frac{p}{4} + x' = \frac{p'}{4}$ (Aufg. 982). Der

Winkel φ ist bestimmt durch $\sin \varphi = \sqrt{\frac{p}{p'}}$.

987. Die Länge der Senkrechten auf die Tangente $2yy' = p(x + x')$ ist gleich:

$$\delta = \sqrt{\frac{p}{4} \left(x' + \frac{p}{4} \right)} = \frac{p}{4 \sin \varphi} \text{ (Aufg. 982)} = \frac{p}{4 \cos \alpha}.$$

988. Der Ort hat nach Aufg. 987 die Polargleichung $\rho \cos \alpha = p$, d. h. der Ort ist die Scheiteltangente.

989.
$$y^2 = px - \frac{p^2}{4}.$$

990. Die Direktrix und die Axe seien Koordinatenachsen; die Gleichung der Parabel ist $y^2 = px - \frac{p^2}{4}$. Die Polare des

Punktes $C(0, y')$ ist $2yy' = px - \frac{p^2}{2}$, sie geht also durch F .

Die Gleichung von CF ist $2xy' + py = py'$. Es ist also CF senkrecht auf der Polaren von C . Sind TA, TB die Tangenten in A, B , so ist TF die Polare von C und $FT \perp CF$.

Es ist aber $\sphericalangle AFT = \sphericalangle BFT$, mithin halbiert FC den Nebenwinkel von AFB .

991. Folgt aus Aufg. 990 und des leicht zu beweisenden Satzes: Der Winkel zwischen irgend zwei Tangenten ist die Hälfte des Winkels, den die Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte bilden.

992. Die beiden Tangenten schneiden sich im Punkte $(0, y')$ der Direktrix. Die Koordinaten der Berührungspunkte seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$; es ist:

$$y_1 = y' + \eta, \quad y_2 = y' - \eta, \quad \eta^2 = y'^2 + \frac{p^2}{4}, \quad y_1^2 = px_1 - \frac{p^2}{4},$$

$$y_2^2 = px_2 - \frac{p^2}{4}.$$

Es ist:

$$(y_1 - y')^2 + x_1^2 = a^2, \quad (y_2 - y')^2 + x_2^2 = b^2$$

und daher:

$$8\eta^4 + 8y'\eta^3 = a^2p^2, \quad 8\eta^4 - 8y'\eta^3 = b^2p^2.$$

Man hat also $\eta^4 = \frac{(a^2 + b^2)p^2}{16}$ und $16\eta^6 = a^2b^2$; daher ist:

$$a^4b^416p^{-2} = (a^2 + b^2)^3 \text{ oder } m^{-\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}.$$

993. Folgt aus Aufg. 991.

994. $\varrho (1 \pm \cos \vartheta) = \frac{p}{2}$, jenachdem man den Winkel ϑ zählt.

995. Wenn die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ ist, so ist die Gleichung der Normale $p(y - y') + 2y'(x - x') = 0$ und die Länge gleich

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{4y'^2 + p^2} = \frac{1}{2} \frac{p}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} p' \sin \varphi \quad (\text{Aufg. 980}).$$

996. Wenn die Gleichung der Parabel $y^2 = px$, so ergeben sich die Fusspunkte der Normalen aus den Gleichungen:

$$y^2 = px, \quad p(y - y') + 2y(x - x') = 0.$$

Es ist $p^2(y - y') + 2y^3 - 2pyx' = 0$. Wenn y_1, y_2, y_3 die drei Wurzeln sind, so ist $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Zieht man die Verbindungslinie der Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, so bildet diese mit der Axe der x denselben Winkel, welchen die Verbindungslinie $(x_3, y_3), (0, 0)$ mit der Axe der x einschliesst.

997. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = px$. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten sind:

$$2y_t = n + q, \quad px_t = nq.$$

Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Normalen sind:

$$x_n = \frac{p}{2} + \frac{4y_t^2}{p} - x_t, \quad y_n = -\frac{4x_ty_t}{p}.$$

998. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind:

$$y_n = -\frac{4n^3}{p^2}, \quad x_n = m + \frac{p + 4m}{2}.$$

Der Krümmungsradius r ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{p + 4m}{2} \right)^2 + \frac{n^2}{p^2} (p^2 + 4n^2)^2 = \frac{p'^2}{4} + \frac{n^2}{p^2} (p^2 + 4n^2)^2 \\ &= \frac{p'^2}{4} + \frac{\cotg^2 \varphi}{4} p'^2, \end{aligned}$$

also $r = \frac{p'}{2 \sin \varphi}$, mithin $r \sin^2 \varphi = N$ (siehe Aufg. 995).

999. Die Schnittpunkte erhält man aus den Gleichungen:

$$y^2 = px, \quad \left(y + \frac{4n^3}{p^2} \right)^2 + \left(x - m + \frac{p + 4m}{2} \right)^2 = \frac{p'^2}{4 \sin^2 \varphi}.$$

Setzt man statt x den Wert $\frac{y^2}{p}$ ein, so hat man zu beachten, dass die Gleichung den Wert n als zweifache Wurzel hat.

1000. Man betrachte die Parabel als eine Ellipse, deren grosse Axe unendlich gross ist.

1001. Aus der Aufg. 998 folgt $pp'^2 \sin^3 \varphi = 8N^3$, also:

$$r = \frac{4N^3}{p^2} = \frac{N^3}{\left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

1002. Nach Aufg. 998 ist $r = \frac{p'}{2 \sin \varphi}$. Ist R der Krümmungsmittelpunkt des Punktes P , TPT_1 die Tangente in P , PA die Brennpunktsehne des Kreises, PC parallel der Axe, so ist $\sphericalangle CPT = \sphericalangle \varphi = \sphericalangle APT_1$, $PR \perp TP$, also:

$$\sphericalangle RPA = \sphericalangle RAP = 90^\circ - \varphi.$$

Es ist also $AP = 2r \sin \varphi = p'$.

1003. Nach Aufg. 998 ist $y = -\frac{4n^3}{p^2}$, $\left(x - \frac{p}{2}\right) = 3m = \frac{n^2}{p}$, also ist $27py^2 = 16\left(x - \frac{p}{2}\right)^3$.

1004. Wie in Aufg. 844–846 beweist man, dass die beiden Kegelschnitte eine Berührung der dritten Ordnung haben, d. h. dass sie vier aufeinander folgende Punkte gemein haben.

1005. Die beiden Kegelschnitte haben im allgemeinen keine Berührung dritter Ordnung, denn sie schneiden sich in den Punkten $y^2 = \frac{d_1 a_1}{c_1 a_1 - b_1^2}$, $a_1 x + b_1 y = 0$ und in den Punkten $x = l$, $a_1 l^2 + 2b_1 l y + c_1 y^2 = d$. Die ersten Schnittpunkte sind mithin unabhängig von der Lage der geraden Linie, welche der Punkt C beschreibt (siehe Aufg 941).

1006. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = px$; die Gleichung der Tangente ist $2yy' = p(x + x')$; die vom Brennpunkte auf die Tangente gefällte Senkrechte hat die Gleichung:

$$py + 2y'x = \frac{y'p}{2};$$

die Gleichung der geraden Linie L ist $yx' = xy'$. Die Schnittpunkte der beiden geraden Linien sind

$$y = \frac{y' p^2}{2(p^2 + 2y'^2)}, \quad x = \frac{py'^2}{2(p^2 + 2y'^2)};$$

hieraus folgt die Gleichung $y^2 + 2x^2 = px$.

1007. Die Senkrechte vom Brennpunkt auf die Normale hat nach Aufg. 1006 die Gleichung $2yy' = px - \frac{p^2}{4}$. Der Ort ist die Direktrix.

1008. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = px$; es ist dann die Gleichung einer der Höhen:

$$\frac{y'y''' - y'y''}{p} \left(x - \frac{y''y'''}{p} \right) + \frac{y'' - y'''}{2} \left(y - \frac{y'' + y'''}{2} \right) = 0,$$

oder

$$y' \left(x + \frac{p}{4} \right) - \frac{y'y''y'''}{p} + p \frac{y}{2} - p \frac{(y' + y'' + y''')}{4} = 0.$$

Die Höhen schneiden sich in dem Punkte

$$x = -\frac{p}{4}, \quad y = \frac{2y'y''y'''}{p^2} + \frac{y' + y'' + y'''}{4},$$

also auf der Direktrix.

1009. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = px$. Wenn a, b die Koordinaten des Schnittpunktes der entsprechenden Tangenten sind, so ist $bn = \frac{p}{2}(m + a)$. Die Koordinaten des Normalschnittpunktes sind

$$x = \frac{p}{2} + \frac{4b^2}{p} - a, \quad y = -\frac{4ab}{p}.$$

Es ist also

$$\frac{p}{2}x + nb = p^2 + 2b^2 + \frac{pm}{2}, \quad \frac{p^2}{2}y = m \frac{bp}{2} - b^2n.$$

Die Gleichung des Ortes ist mithin:

$$2 \left\{ \frac{p}{2}(y - n) + n(x - m) \right\}^2 = (pm - n^2)(ny + 2mx - pm - 2m^2),$$

d. i. eine Parabel, deren Axe zu dem Perpendikel von dem Punkte auf seine Polare parallel ist.

1010. Wenn die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ ist, so ist die Gleichung der Tangente $2yy' = p(x + x') = px + y'^2$ und die durch den Scheitel gehende Senkrechte auf die Tangente hat die Gleichung $py + 2y'x = 0$. Der gesuchte Ort hat also die Gleichung $-py^2 - 4y^2x = 4x^3$.

1011. Die Gleichung der Normalen der Parabel $y^2 = px$ ist $p(y - y') + 2y'(x - x') = 0$, oder in der Normalform:

$$\frac{py}{\sqrt{p^2 - 4y'^2}} + \frac{2y'x}{\sqrt{p^2 + 4y'^2}} - \frac{y'(p + 2x')}{\sqrt{p^2 + 4y'^2}} = 0.$$

Die Länge der Senkrechten vom Brennpunkt $(0, \frac{p}{4})$ ist daher:

$$\frac{y' \left(x' + \frac{p}{4} \right)}{\sqrt{y'^2 + \frac{p^2}{4}}} = \sqrt{x' \left(x' + \frac{p}{4} \right)}.$$

Wenn diese Senkrechte mit der Axe der x den Winkel ϑ einschliesst, so ist:

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{p}{4x' + p}}, \quad \cos \vartheta = \sqrt{\frac{x'}{x' + \frac{p}{4}}};$$

die Polargleichung des Ortes ist $\varrho^2 \sin^2 \vartheta = \frac{p}{4} \varrho \cos \vartheta$, oder wenn der Brennpunkt Koordinatenursprung ist $y^2 = \frac{p}{4} x$.

1012. Der Inhalt des Dreiecks, welches die Punkte (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''') der Parabel $y^2 = px$ zu Ecken hat, ist $\frac{1}{2p} (y' - y'') (y'' - y''') (y''' - y')$. Der Inhalt des Dreiecks, dessen Seiten die geraden Linien $2yy' = p(x + x')$, $2yy'' = p(x + x'')$, $2yy''' = p(x - x''')$ sind, ist $\frac{1}{4p} (y' - y'') (y'' - y''') (y''' - y')$.

1013. Wenn ein Dreieck die Seitenlängen a , b , c und den Inhalt $\frac{1}{2} J$ besitzt, so ist der Radius des umgeschriebenen Kreises $\frac{abc}{2J}$. Bildet die Sehne a zwischen den Punkten (x', y') , (x'', y'') der Parabel $y^2 = px$ mit der Axe der x den Winkel φ''' , so ist $a \sin \varphi''' = y' - y''$.

Es ist also

$$2J = \frac{2abc}{p} \sin \varphi' \cdot \sin \varphi'' \cdot \sin \varphi''',$$

und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises ist:

$$\frac{p}{2 \sin \varphi' \cdot \sin \varphi'' \cdot \sin \varphi'''}$$

Dem Dreieck können vier Kreise eingeschrieben werden, deren Radien sind:

$$\varrho = \frac{J}{a+b+c}, \quad \varrho_a = \frac{J}{b+c}, \quad \varrho_b = \frac{J}{a+c}, \quad \varrho_c = \frac{J}{a+b}.$$

1014. $r = \frac{p}{8 \sin \varphi' \cdot \sin \varphi'' \cdot \sin \varphi'''}$, wenn $y^2 = px$ die Gleichung der Parabel ist. Es ist aber:

$$p' = \frac{p}{\sin^2 \varphi'}, \quad p'' = \frac{p}{\sin^2 \varphi''}, \quad p''' = \frac{p}{\sin^2 \varphi'''},$$

also:

$$r^2 = \frac{p' \cdot p'' \cdot p'''}{64p}.$$

1015. Nach Aufg. 965 ist die Gleichung des Tangentenpaares:

$$(y'^2 - px') (y^2 - px) = \left(yy' - \frac{p}{2} (x + x') \right)^2.$$

Diesen Tangenten laufen parallel die beiden geraden Linien

$$x'y^2 - y'xy + \frac{p}{4} mx^2 = 0,$$

und der von ihnen eingeschlossene Winkel ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{y'^2 - px'}}{x' + \frac{p}{4}}.$$

Die Gleichung des Ortes ist $y^2 - px = \left(x + \frac{p}{4}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$, eine Hyperbel, welche denselben Brennpunkt und dieselbe Direktrix wie die Parabel besitzt.

1016. Setzt man in Aufg. 1015 $\varphi = 1R$, so ist der Ort die Direktrix $x = -\frac{p}{4}$. (Siehe Aufg. 965.)

1017. Die Normalen schliessen denselben Winkel wie die Tangenten ein. Es ist also nach Aufg. 1016:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{y'^2 - px'}{\left(x' + \frac{p}{4}\right)^2}.$$

Der Schnittpunkt der Tangenten beschreibt die Hyperbel $y_1^2 - px_1 = \left(x_1 + \frac{p}{4}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$. Die Koordinaten des Schnittpunktes der entsprechenden Normalen sind:

$$x = \frac{p}{2} + \frac{4y_1^2}{p} - x_1, \quad y = -\frac{4x_1y_1}{p}.$$

Eliminiert man x_1, y_1 in den drei letzten Gleichungen, so erhält man die Gleichung des Ortes.

1018. Wenn man $\varphi = 1R$ in der Aufg. 1017 setzt, so ist die Gleichung des Ortes $y^2 = \frac{p}{4} \left(x - \frac{3p}{4}\right)$.

1019. Die gegebenen Tangenten seien die Koordinatenachsen; die Gleichung der Parabel ist:

$$(mx + ny)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Die Axe der y schneidet die Parabel in den Punkten $n^2y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Diese letzte Gleichung muss für y nur den einen Wert b geben, also ist $a_{33} = b^2n^2$, $a_{23} = -bn^2$. Ebenso erhält man $a_{33} = a^2m^2$, $a_{13} = -am^2$. Da $a^2m^2 = b^2n^2$ ist, so ist die Gleichung der Parabel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

Der Hauptparameter ist also gleich:

$$\frac{4a^2b^2 \sin^2 \omega}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{S. Aufg. 959, 2.})$$

1020–1022. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der zwei Tangenten in den Punkten (x', y') , (x'', y'') der Parabel $y^2 = px$ sind:

$$2y = y' + y'', \quad px = y'y''.$$

Bilden die Tangenten mit der Axe die Winkel φ', φ'' , so ist:

$$p' = \frac{p}{\sin^2 \varphi'}, \quad p'' = \frac{p}{\sin^2 \varphi''}, \quad p' = p + 4x', \quad p'' = p + 4x''.$$

Es ist demnach:

$$(p + 4x')(p + 4x'') = \frac{p^2}{\sin^2 \varphi' \cdot \sin^2 \varphi''},$$

$$\frac{p^4}{\sin^2 \varphi' \cdot \sin^2 \varphi''} = p^4 + 4p^2(y'^2 + y''^2) + 16y'^2 y''^2.$$

Der Ort der Aufg. 1021 ist daher der Kreis:

$$16(x^2 + y^2) - 8px = p^2 + \frac{p^2}{\sin^2 \varphi' \cdot \sin^2 \varphi''}.$$

Es ist:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi' \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi'' = \frac{p^2}{(p' - p)(p'' - p)} = \frac{p^2}{16x'x''} = \frac{p^4}{16y'^2 y''^2} = \frac{p^2}{16x^2};$$

der Ort ist eine gerade Linie, wenn das Produkt der Tangenten der Winkel konstant ist. Ferner ist:

$$\cotg \varphi' = \frac{2y'}{p}, \quad \cotg \varphi'' = \frac{2y''}{p}.$$

Es ist also:

$$\cotg \varphi' + \cotg \varphi'' = \frac{2}{p}(y' + y'') = \frac{4y}{p}$$

eine gerade Linie; und es ist:

$$\cotg \varphi' - \cotg \varphi'' = \frac{2}{p}(y' - y'');$$

aus dieser Gleichung folgt, dass der Ort eine Parabel ist.

Die Koordinaten des Schnittpunktes von zwei Normalen sind:

$$x = \frac{p}{2} + \frac{y'^2 + y'y'' + y''^2}{p}, \quad y = -\frac{2y'y''(y' + y'')}{p}.$$

Bilden die Normalen mit der Axe den Winkel ψ' , ψ'' , so ist:

$$\sin^2 \psi' \cdot \sin^2 \psi'' = \frac{16x'x''}{(p + 4x')(p + 4x'')} = \frac{16y'^2 y''^2}{(p^2 + 4y'^2)(p^2 + 4y''^2)},$$

$$\operatorname{tg}^2 \psi' \cdot \operatorname{tg}^2 \psi'' = \frac{16x'x''}{p^2} = \frac{16y'^2 y''^2}{p^4},$$

$$\cotg \psi' = \frac{p}{2y'}, \quad \cotg \psi'' = \frac{p}{2y''}, \quad \cotg \psi' + \cotg \psi'' = \frac{p}{2} \frac{y' + y''}{y'y''},$$

$$\cotg \psi' - \cotg \psi'' = \frac{p}{2} \frac{y'' - y'}{y'y''}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die verschiedenen Örter.

1023, 1024. Die Punkte M , N sind durch C , P harmonisch getrennt.

Der Ort der Aufg. 1023 hat die Gleichung:

$$(p_1 + q_2 x) y = p x.$$

In der Aufg. 1024 transformiere man die Koordinaten, so dass die Axe der x unverändert bleibt und die der geraden Linie $y = ax + b$ parallelen Tangente an die Parabel zur Axe der y wird. Die neue Gleichung der Parabel ist $y^2 = p'x$ und die Gleichung der geraden Linie, auf welcher sich C bewegt, ist $y = p'_1 + q'_2 x$. Der Ort der Aufg. 1024 hat also die Gleichung $(p'_1 + q'_2 x) y = p' x$.

1025. Da die Excentricität aller Parabeln gleich der Einheit ist, so sind Parabeln ähnlich und ähnlich gelegen, wenn deren Axen parallel sind.

Vermischte Aufgaben.

1026. Nach Aufg. 723, 724 und der Bezeichnung der Aufg. 732 ist $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 = 0$ ein Kegelschnitt, in Bezug auf den die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Seiten eines sich selbst konjugierten Dreiecks sind, und ebenso ist $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ ein Kegelschnitt, in Bezug auf den die geraden Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Seiten eines sich selbst konjugierten Dreiecks sind. Die Basisecken des Dreiecks sollen sich auf dem ersten Kegelschnitt bewegen und die Seiten sollen den zweiten Kegelschnitt berühren. Man setze:

$$x'_n = x' \cos \alpha_n + y' \sin \alpha_n - \delta_n.$$

Die Gleichung einer Tangente im Punkte x' , y' des Kegelschnittes $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ ist:

$$x(\cos \alpha_1 x'_1 + \cos \alpha_2 x'_2 - \cos \alpha_3 x'_3) + y(\sin \alpha_1 x'_1 + \sin \alpha_2 x'_2 - \sin \alpha_3 x'_3) + x'_1 \delta_1 + x'_2 \delta_2 - x'_3 \delta_3 = 0,$$

oder, weil $x_1'^2 + x_2'^2 = x_3'^2$:

$$x_1 x'_1 + x_2 x'_2 = x_3 x'_3.$$

Ebenso ist die Gleichung der Tangente im Punkte x''' , y''' :

$$x_1 x'''_1 + x_2 x'''_2 = x_3 x'''_3.$$

Man kann setzen:

$$x'_1 = r \cos \varphi', \quad x'_2 = r \sin \varphi', \quad x'_3 = r; \quad x'''_1 = r \cos \varphi''', \quad y'''_1 = r \sin \varphi'''.$$

Die beiden Tangenten schneiden sich in den Punkten:

$$lx_1 = \cos \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'''), \quad lx_2 = \sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'''),$$

$$lx_3 = \cos \frac{1}{2} (\varphi' - \varphi''').$$

Dieser Punkt soll auf dem ersten Kegelschnitt liegen, also ist:

$$a_{11} \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi''') + a_{22} \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi''') = a_{33} \cos^2 \frac{1}{2} (\varphi' - \varphi''')$$

oder:

$$(a_{11} + a_{22} - a_{33}) + (a_{11} - a_{22} - a_{33}) \cos \varphi' \cos \varphi'''$$

$$+ (a_{22} - a_{11} - a_{33}) \sin \varphi' \sin \varphi''' = 0.$$

Ebenso ist:

$$(a_{11} + a_{22} - a_{33}) + (a_{11} - a_{22} - a_{33}) \cos \varphi'' \cos \varphi'''$$

$$+ (a_{22} - a_{11} - a_{33}) \sin \varphi'' \sin \varphi''' = 0,$$

also:

$$(a_{11} + a_{22} - a_{33}) \cos \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') = (a_{22} + a_{33} - a_{11}) \cos \frac{1}{2} (\varphi' - \varphi'') \cos \varphi''',$$

$$(a_{11} + a_{22} - a_{33}) \sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'') = (a_{11} + a_{33} - a_{22}) \cos \frac{1}{2} (\varphi' - \varphi'') \sin \varphi'''.$$

Der Punkt, dessen Ort bestimmt werden soll, ist:

$$px_1 = \cos \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi''), \quad px_2 = \sin \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi''),$$

$$px_3 = \cos \frac{1}{2} (\varphi' - \varphi'').$$

Die Gleichung des Ortes ist:

$$\frac{x_1^2}{(a_{22} + a_{33} - a_{11})^2} + \frac{x_2^2}{(a_{33} + a_{11} - a_{22})^2} = \frac{x_3^2}{(a_{11} + a_{22} - a_{33})^2};$$

der Ort ist ein Kegelschnitt, in Bezug auf den die geraden Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Seiten eines sich selbst konjugierten Dreiecks sind. Dass die Aufgabe allgemein gelöst ist, sieht man leicht ein.

1027. Das dem Kegelschnitte K einbeschriebene Dreieck sei ABC , die Seiten AB und AC berühren den Kegelschnitt K_1 . Die Sehne AB habe in Bezug auf K den Pol F und AC habe in Bezug auf K den Pol G ; die Geraden CG , BF schneiden sich in dem Pole E der Sehne CB . Beschreiben A , B , C

den Kegelschnitt K und berühren AB , BC den Kegelschnitt K_1 , so beschreiben die Punkte F und G einen bekannten Kegelschnitt (Aufg. 523, 524) und die Linien FG , GE , EF hüllen den Kegelschnitt ein. Nach Aufg. 1026 beschreibt also der Punkt E einen Kegelschnitt, mithin umhüllt die gerade Linie CB nach Aufg. 523 einen Kegelschnitt.

1028. Es seien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gleichungen von zwei zueinander senkrechten geraden Linien durch den Brennpunkt und $x_3 = 0$ die zugehörige Direktrix. Es ist die Gleichung des Kegelschnittes $x_1^2 + x_2^2 = e^2 x_3^2$. Nach Aufg. 1026 ist die Gleichung der Tangente im Punkte x', y' des Kegelschnittes $x_1 x'_1 + x_2 x'_2 = e^2 x_3 x'_3$. Man kann setzen $x'_1 = e \cos \varphi x'_3$, $x'_2 = e \sin \varphi x'_3$, also ist die Gleichung der Tangente:

$$x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi = e x_3.$$

Die Gleichung der Sehne findet man leicht:

$$x_1 \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + x_2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = e x_3 \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi').$$

Diese Sehne berührt immer den Kegelschnitt:

$$x_1^2 + x_2^2 = e^2 x_3^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\varphi - \varphi'),$$

d. h. einen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen den Brennpunkt und die Direktrix gemein hat.

1029. Die gerade Linie ab schneide den Kegelschnitt K_2 in a' , b' . Die gemeinschaftlichen Sehnen von K_2 und K_3 schneiden die Linie ab in Punkten derselben Involution, in welcher die Schnittpunkte von ab mit K_2 und K_3 , d. h. a , b ; a' , b' entsprechende Punkte sind. Wenn a'' , b'' , c'' , d'' die Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten sind, wenn eine gerade Linie den einen Kegelschnitt in α , α' schneidet und mit der geraden Linie $a''d''$ den Punkt γ , mit der geraden Linie $a''b''$ den Punkt β , mit der geraden Linie $a''c''$ den Punkt δ , mit der geraden Linie $b''d''$ den Punkt δ' , mit der geraden Linie $d''c''$ den Punkt β' , mit der geraden Linie $b''c''$ den Punkt γ' gemein hat, so ist $a''(\alpha d'' b'' \alpha') = c''(\alpha d'' b'' \alpha')$. Es ist also $(\alpha \gamma \beta \alpha') = (\alpha \beta' \gamma' \alpha') = (\alpha' \gamma' \beta' \alpha)$; die Punkte α , α' gehören also zu der Involution, welche durch die Paare β , β' ; γ , γ' be-

stimmt ist. Aus den Eigenschaften des Vierseits folgt, dass ein System von Kegelschnitten, welches dieselben vier geraden Linien berührt, von einer Transversale durch einen der Diagonalenschnittpunkte des Vierseites involutorisch geschnitten wird; die Schnittpunkte in den Diagonalen sind die Doppelpunkte, und die konjugierten Punkte des Systems liegen in den Gegenseiten des Vierseits. Da die gerade Linie ab durch einen Diagonalenschnittpunkt von $ABCD$ hindurchgeht, so gehören ab , $a'b'$ zu einer Involution, in welcher die Schnittpunkte von ab mit C und D konjugierte Punkte sind. Ist also D die eine der gemeinschaftlichen Sehnen, so muss die andere durch den Schnittpunkt von ab mit C gehen.

1030. Nach der Aufg. 1029 berührt ein durch ABC gehender Kegelschnitt den Kreis in D' , wenn er durch die Punkte geht, in denen der Kreis von der Verbindungslinie der Schnittpunkte von AA' mit BC , BB' mit CA , CC' mit AB geschnitten wird. Diese gerade Linie ist unendlich entfernt, der berührende Kegelschnitt ist ein Kreis.

1031. Wenn der Brennpunkt die Koordinaten x, y hat und die vier Punkte die Koordinaten (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''') , (x''', y''') haben, so ist:

$$\varrho = Ax' + By' + C, \quad \varrho' = Ax'' + By'' + C, \quad \varrho'' = Ax''' + By''' + C, \\ \varrho''' = Ax'''' + By'''' + C, \quad \varrho^{(n)} = \sqrt{(x - x^{(n)})^2 + (y - y^{(n)})^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Gleichung des Ortes:

$$M\varrho + N\varrho' + P\varrho'' = Q\varrho''.$$

Die Gleichung des Ortes ist vom sechsten Grade.

1032. Nach Aufg. 643–645, Bezeichnung der Aufg. 623, sind die Koordinaten der Brennpunkte:

$$(A_{33}x - A_{13})^2 = \frac{1}{2} A (R + a_{11} - a_{22}), \quad R^2 = 4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2, \\ (A_{33}y - A_{23})^2 = \frac{1}{2} A (R + a_{22} - a_{11}), \quad A(a_{11} - a_{22}) = A_{22}A_{33} - A_{23}^2.$$

Nach Aufg. 550, 551 bestehen die Gleichungen

$F(u_1, v_1) = 0, F(u_2, v_2) = 0, F(u_3, v_3) = 0, F(u_4, v_4) = 0$,
wenn u_n, v_n ($n = 1, 2, 3, 4$) die Koordinaten der Vierecksseiten sind.

Aus diesen Gleichungen kann man den Ort des Brennpunktes bestimmen.

Die Gleichung der Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Tangenten ist:

$$F(u, v) + lF_1(u, v) = 0.$$

Die Koordinaten der Brennpunkte sind:

$$[(A_{33} + lA'_{33})x - (A_{13} + lA'_{13})]^2 = \frac{1}{2} A_1 (R' + a'_{11} = a'_{22}),$$

$$[(A_{33} + lA'_{33})y - (A_{23} + lA'_{23})]^2 = \frac{1}{2} A_1 (R' + a'_{11} - a'_{22}).$$

Eliminiert man l , so ist die Gleichung des Ortes:

$$\{A_{33}(x^2 - y^2) + 2A_{23}y - 2A_{13}x + A_{11} - A_{22}\} \{A'_{33}xy - A'_{23}x - A'_{13}y + A'_{12}\}, \\ = \{A'_{33}(x^2 - y^2) + 2A'_{23}y - 2A'_{13}x + A'_{11} - A'_{22}\} \{A_{33}xy - A_{23}x - A_{13}y + A_{12}\}.$$

Der Ort ist eine Kurve dritter Ordnung. Wenn die Kegelschnitte $F(u, v) = 0$, $F_1(u, v) = 0$ Parabeln sind, so ist $A_{33} = A'_{33} = 0$ und der Ort der Brennpunkte ist ein Kreis. Wenn diese Kegelschnitte denselben Mittelpunkt haben, so sind für den Mittelpunkt als Ursprung $A_{23} = A'_{23} = A_{13} = A'_{13} = 0$ und der Ort der Brennpunkte ist eine gleichseitige Hyperbel.

1033, 1034. Die Gleichung der Inverse des Kegelschnittes in Bezug auf den Punkt x', y' ist:

$$a'_{33}(x^2 + y^2) + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + \frac{y^2}{y^2 + x^2} \left(a_{11} \frac{x^2}{y^2} + 2a_{12} \frac{x}{y} + a_{22} \right) = 0,$$

wenn a'_{13} , a'_{23} , a'_{33} die Grösse der Aufg. 469 sind.

1035. Die Gleichung der Ellipse sei $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, die Gleichung von AB sei $y - mx - n = 0$ in einer ihrer Lagen, die Gleichung von CD sei $px + qy + r = 0$.

Es geht dann der Kegelschnitt

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + (y - mx - n)(px + qy + r) = 0$$

durch die vier Punkte, welcher zu einer gleichseitigen Hyperbel wird, wenn ist:

$$a^2 + q = 0, \quad b^2 - mp = 0, \quad a^2b^2 + nr = 0.$$

Die Gleichung von CD ist also:

$$\frac{b^2}{m}x - a^2y - \frac{a^2b^2}{n} = 0.$$

C', D' seien in Bezug auf den Ellipsenmittelpunkt symmetrisch zu C, D . Die Gleichung der Parallelen $CD, C'D'$ ist

$$\left(\frac{b^2}{m}x - a^2y\right)^2 - \frac{a^4b^4}{n^2} = 0.$$

Die Gleichung der Kegelschnitte durch diese Punkte und durch A, B, C, D ist:

$$l(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) - \left\{\left(\frac{b^2}{m}x - a^2y\right)^2 - \frac{a^4b^4}{n^2}\right\} = 0.$$

Damit dieser Kegelschnitt eine Parabel ist, muss sein:

$$-l^2a^2b^2 + l\left(a^4b^2 + \frac{a^2b^4}{m^2}\right) = 0.$$

Es ist also entweder $l = 0$, oder $l = a^2 + \frac{b^2}{m^2}$. Die Annahme $l = 0$ entspricht dem System $CD, C'D'$ und der Wert $l = a^2 + \frac{b^2}{m^2}$ dem System CD', DC' . Für den Wert $l = a^2 + \frac{b^2}{m^2}$ hat man

$$(y + mx)^2 - n'^2 = 0,$$

wenn man setzt $n'^2 = m^2\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2} - \frac{a^2b^2}{n^2}\right)$.

Die Gleichung der Kegelschnitte um $ABCD'$ oder $ABDC'$ ist also:

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + l'(y - mx - n)(y + mx \pm n') = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen Kreis dar, wenn ist:

$$l' = -\frac{b^2 - a^2}{1 + m^2}.$$

Um die Gleichung des Ortes zu haben, bestimme man den Mittelpunkt und eliminiere die Grössen n, n' , welches sehr einfach ist, da n und n' nur im ersten Grade vorkommen.

1036, 1037. Es seien x_0, y_0 die Koordinaten von $M, y = mx$ die Gleichung eines Durchmessers. Die Gleichung des Kreises hat die Form:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 + l(y - mx)(y + mx - y_0 - mx_0) = 0,$$

oder

$$\left(\frac{1}{a} - lm\right) x^2 + \left(\frac{1}{b} + l\right) y^2 - l(y_0 + mx_0)(y - mx) = 0,$$

und die Bedingung für einen Kreis ist:

$$l = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{1 + m^2};$$

die Gleichung des Kreises ist mithin:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{m^2}{b}\right) (x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) (y_0 + mx_0)(y - mx) = 0.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind gegeben durch:

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{m^2}{b}\right) x - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) m(y_0 + mx_0) = 0,$$

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{m^2}{b}\right) y + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) (y_0 + mx_0) = 0.$$

Hieraus folgt die Gleichung $x + my = 0$, welche eine Senkrechte auf $y = mx$ durch den Ellipsenmittelpunkt darstellt. Setzt man $m = -\frac{x}{y}$ in die zweite Gleichung für den Mittelpunkt, so ist:

$$ax^2 + by^2 + \frac{a-b}{2}(y_0y - x_0x) = 0$$

die Gleichung des Ortes der Kreiscentren, also ein Kegelschnitt, welcher durch den Ursprung geht.

Die Gleichung zweier durch den Ursprung gehenden Senkrechten ist:

$$y^2 + kxy - x^2 = 0,$$

und die Gleichung des Kegelschnittes, welcher durch die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit dem Orte S geht, ist:

$$(b + l)y^2 + lkxy + (a - l)x^2 + \frac{a-b}{2}(y_0y - x_0x) = 0.$$

Dieser Kegelschnitt zerfällt in die beiden Geraden:

$$y_0y - x_0x = 0,$$

$$l\left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0}\right) + b\frac{y}{y_0} - a\frac{x}{x_0} + \frac{a-b}{2} = 0,$$

wenn man setzt $b + l = ny_0$, $a - l = -mx_0$, $lk = my_0 - nx_0$.

Die letzte Gerade geht durch einen festen Punkt, dessen Koordinaten sind:

$$x_1 = \frac{a-b}{2(a+b)} x_0, \quad y_1 = -\frac{a-b}{2(a+b)}.$$

Die Polare dieses Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt S ist:

$$x_0 x + y_0 y - \frac{y_0^2 + x_0^2}{2} = 0.$$

Es ist dies die Gleichung einer Geraden, welche in der Mitte von OM auf OM senkrecht steht.

Die Gleichung der Normalen an den Ort S im Punkte x, y ist

$$Y - y = \frac{4by + (a-b)y_0}{4ax - (a-b)x_0} (X - x).$$

Wenn diese Gerade durch den Ursprung gehen soll, so muss sein:

$$4xy - y_0 x - x_0 y = 0.$$

Diese Gleichung stellt dar den Ort der Fusspunkte aller Normalen durch O gezogen an alle Kegelschnitte S , welche man durch Verändern der gegebenen Axen erhält.

Ist $a = 1 = -b$, so ist die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes $x^2 - y^2 = 1$, die Gleichung von S ist

$$x^2 - y^2 + y_0 y - x_0 x = 0.$$

Die Abscissen der Punkte von drei Normalen, welche durch O gehen, sind bestimmt durch die Gleichung:

$$16x^3 - 24x_0 x^2 + (9x_0^2 + 3y_0^2)x - x_0(x_0^2 + y_0^2) = 0$$

und man erhält

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{\sqrt[3]{x_0 + y_0} + \sqrt[3]{x_0 - y_0}}{4},$$

$$y = \frac{y_0}{2} + \frac{\sqrt[3]{x_0 + y_0} - \sqrt[3]{x_0 - y_0}}{4}.$$

Die Gleichung des Kreises durch die Fusspunkte der drei Normalen ist im allgemeinen Fall:

$$8ab(x^2 + y^2) + 2(a^2 - 3ab + 2b^2)x_0 x + 2(2a^2 - 3ab + b^2)y_0 y - (a-b)^2(x_0^2 + y_0^2) = 0.$$

1038. Sind F, F' der Ellipse Brennpunkte, C der Schnittpunkt von MN und OY . Es ist:

$$\frac{CN}{CM} = \frac{PN}{PM}, \text{ also } ON = PN, QM = PM.$$

Der Punkt C liegt also auf der Halbierungslinie des Aussenwinkels P des Dreiecks MPN , mithin auch auf der Geraden, welche senkrecht auf DD' ist. Der Punkt C ist also das Centrum des betrachteten Kreises. Ferner folgt aus $\triangle CPD$:

$$CD^2 = CP^2 + PD^2 = CP^2 + MP \cdot PN$$

und

$$MP \cdot PN = CM \cdot CN - CP^2,$$

mithin:

$$CD^2 = CM \cdot CN.$$

Aus der Figur folgt dann leicht $CF^2 = CM \cdot CN = CD^2$ oder $CF = CD$.

1039, 1040. Die gleichseitige Hyperbel durch M, N hat die Gleichung:

$$x^2 + 2hxy - y^2 + 2gy - r^2 = 0.$$

Die Polare des Punktes $Q (\mu, \nu)$ in Bezug auf diesen Kegelschnitt ist:

$$(\mu + h\nu)x + (h\mu - \nu + g)y + g\nu - r^2 = 0,$$

und wenn Q auf dem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ liegt, so hat man $\mu = r \cos \alpha$, $\nu = r \sin \alpha$ und die Gleichung der Polare ist:

$$r(\cos \alpha + h \sin \alpha)x + (hr \cos \alpha - r \sin \alpha + g)y + r(g \sin \alpha - r) = 0.$$

Diese Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha, & y = -r \sin \alpha: \\ x = \frac{r \cos \alpha (r^2 - r^2 h^2 - g^2) + 2hr^2 (r \sin \alpha - g)}{r^2 + r^2 h^2 + g^2 + 2gr (h \cos \alpha - \sin \alpha)}, \\ y = \frac{r \sin \alpha (r^2 h^2 - r^2 - g^2) + 2r^2 (rh \cos \alpha + g)}{r^2 + r^2 h^2 + g^2 + 2gr (h \cos \alpha - \sin \alpha)}. \end{cases}$$

Die Gleichung von QA ist $x = r \cos \alpha$ und die von QB $(hr + g \cos \alpha)y + (r - g \sin \alpha)x - (h \sin \alpha + \cos \alpha)r^2 = 0$.

Die Gerade QA ist senkrecht auf MN und die Gerade QB geht durch einen festen Punkt $\left(x = -\frac{r^2 h}{g}, y = \frac{r^2}{g}\right)$. Der

Punkt P ist Pol von MN in Bezug auf die Hyperbel. Setzt man $d = -\frac{r^2 h}{g}$, $\frac{r^2}{g} = c$; man sieht, dass das Centrum der Hyperbel der Schnittpunkt der Polare von P in Bezug auf den Kreis und der Geraden OP ist. Kennt man die Richtung der Axen, so kennt man auch die der Asymptoten. Oder wenn die Asymptoten und ein Punkt M oder N gegeben sind, so kann man die Länge der Axen, also auch die Scheitel bestimmen.

Soll der Punkt P die Gerade $y = x$ beschreiben, so ist $d = c$, und die Gleichung der Hyperbel ist:

$$x^2 - 2xy - y^2 + \frac{2r^2}{c} y - r^2 = 0.$$

Die allgemeine Gleichung in Bezug auf die Brennpunkte ist:

$$(1 - m^2) x^2 - 2mnxy - (1 - n^2) y^2 - 2(\alpha + mp)x - 2(\beta + np)y = p^2 - \alpha^2 - \beta^2,$$

mithin ist:

$$p = -\frac{\alpha}{m}, \quad -r^2 mn = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\alpha^2}{m^2},$$

wenn α, β die Koordinaten des Brennpunktes sind. Der Ort des Brennpunktes ist:

- 1) eine Ellipse $r^2(\sqrt{2} + 1) = \alpha^2 \sqrt{2} + \beta^2(2 + \sqrt{2})$,
- 2) eine Hyperbel $r^2(\sqrt{2} - 1) = \alpha^2 \sqrt{2} - \beta^2(2 - \sqrt{2})$.

1041. Man weiss, dass, wenn zwei Kegelschnitte K, K' sich in den Punkten A, B, C, D schneiden und die Geraden durch A, B resp. den Kegelschnitt K in F, G und K' in F', G' treffen, die Geraden $FG, F'G'$ sich in einem Punkte H der Geraden CD treffen; fallen F' und G' zusammen, so schneiden sich die Gerade FG und die Tangente $F'G'$ an K' auf CD . Sind K_1, K'_1 die Kegelschnitte durch die Punkte M, A, B, C, D resp. M, A', B', C', D' und beachtet man, dass für alle Kegelschnitte K , welche sich in vier Punkten schneiden, die Tangente an K in M und die Geraden $CD, B'A'$ sich in einem Punkte schneiden und dasselbe für den Kegelschnitt K' gilt, so ist der Satz bewiesen.

1042. Ist die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px + p^2$; α, β die Koordinaten von M , so ist die Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{p}(p^2 + \beta^2) + \frac{2\beta y}{p}(p - \alpha) - [(p - \alpha)^2 + p^2 + \beta^2] = 0.$$

Die Gleichung der Polare ist:

$$\beta y - p(\alpha + x) + p^2 = 0$$

und die Gleichungen der beiden dem Kreise und der Parabel gemeinschaftlichen Sehnen

$$\beta y - p(\alpha + x) + p^2 = 0, \quad \beta y + px + p(p - \alpha) = 0,$$

welche sich auf der Geraden $x = 0$ schneiden.

1043, 1044. Ist $OA = a$, $OB = b$, so ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbeln:

$$x[y - l(x - a)]\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = 0.$$

Der Ort P ist die Parabel, deren Gleichung ist:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 - ax\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

Der Ort des Scheitels der Parabeln ist ein Kreis, dessen Gleichung ist:

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}by + \frac{b^2}{8} = 0.$$

1045. Es seien:

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta_1 &= P = 0, \\ x \cos \beta + y \sin \beta - \delta_2 &= Q = 0, \\ x \cos \gamma + y \sin \gamma - \delta_3 &= R = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der Polaren der Dreiecksecken. Der gegebene Kegelschnitt hat eine Gleichung von der Form:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{Q} + \frac{C}{R} = 0$$

und nach der Aufgabe muss sein $A = B = C$; die Gleichung ist:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} = 0,$$

welche mit der Gleichung $a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$ übereinstimmen muss.

Man hat dann:

$$\begin{aligned}\delta_1 (\cos \beta + \cos \gamma) + \delta_2 (\cos \gamma + \cos \alpha) + \delta_3 (\cos \alpha + \cos \beta) &= 0, \\ \delta_1 (\sin \beta + \sin \gamma) + \delta_2 (\sin \gamma + \sin \alpha) + \delta_3 (\sin \alpha + \sin \beta) &= 0, \\ \sin (\beta + \gamma) + \sin (\gamma + \alpha) + \sin (\alpha + \beta) &= 0, \\ \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta}{b^2} &= \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha + \sin \alpha \sin \beta}{a^2} \\ &= \frac{\delta_3 \delta_2 + \delta_3 \delta_1 + \delta_2 \delta_1}{-a^2 b^2} = \lambda,\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}\cos (\beta + \gamma) + \cos (\gamma + \alpha) + \cos (\alpha + \beta) &= -\lambda c^2, \\ \cos (\beta - \gamma) + \cos (\gamma - \alpha) + \cos (\alpha - \beta) &= \lambda (a^2 + b^2), \\ c^4 \lambda^2 - 2 (a^2 + b^2) \lambda - 3 &= 0, \quad \lambda = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 3c^4}}{c^4}.\end{aligned}$$

Sind x_1, y_1 die Koordinaten der Ecke M , Pol der Geraden $R = 0$. Man hat dann:

$$P_1 = Q_1 = -R_1 = \mu',$$

also:

$$\begin{aligned}x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha &= \delta_1 + \mu', \quad x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta = \delta_2 + \mu', \\ x_1 \cos \gamma + y_1 \sin \gamma &= \delta_3 - \mu' .\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\lambda b^2 x_1 = \mu' \cos \gamma, \quad \lambda' a^2 y_1 = \mu' \sin \gamma,$$

also:

$$\mu'^2 = \lambda^2 (b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2),$$

und da

$$\mu'^2 + \lambda (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2) = 0,$$

so ist die Gleichung des Ortes für M :

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 + \lambda (a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2) = 0.$$

Es sei H der Höhenschnittpunkt mit den Koordinaten x_0, y_0 , dann ist $P_0 = Q_0 = R_0 = \mu$ und:

$$3\mu^2 = \lambda (a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2).$$

Man erhält auch:

$$\begin{aligned}\lambda b^2 x_0 &= \mu (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma), \\ \lambda a^2 y_0 &= \mu (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma),\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\mu^2 = \frac{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}{c^4},$$

also ist der Ort von H durch die Gleichung:

$$3 (b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2) = c^4 \lambda (a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2)$$

gegeben.

1046. Man betrachte ein Viereck $ABDE$, dessen $\sphericalangle EDB$ in rechter ist, man ziehe AG senkrecht BD und schneide AE , BD in C und der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC sei H ; über AD und BE beschreibe man als Durchmesser zwei Kreise, deren Radikalaxe durch H und D geht. Sei L der Mittelpunkt von AD und O das Centrum des dem Viereck $ABDE$ eingeschriebenen Kegelschnittes. Man hat dann $OD^2 - OH^2 = LD^2 - LH^2$. Schneidet AH den Kreis um das Dreieck ABC in H_1 , so ist $HG \cdot HA = \frac{1}{2} HH_1 \cdot HA$ und hat der Kreis um ABC den Radius R und ist δ die Entfernung des Punktes H vom Mittelpunkt des Kreises P , so ist

$$OD^2 - OA^2 = \frac{R^2 - \delta^2}{2},$$

oder $2(a^2 + b^2) - 2OH^2 + \delta^2 - R^2 = 0$, d. h. der Mittelpunkt beschreibt einen Kreis, dessen Centrum der Schnittpunkt der Höhen des gegebenen Dreiecks ist.

1047. Es sei m einer der Punkte, in welchen D die Kurve S schneidet. Zwei in A oskulierende Kegelschnitte kann man betrachten als Kegelschnitte, welche bei A drei unendlich nahe Punkte gemein haben. Der den Kegelschnitt S in A oskulierende Kegelschnitt geht durch a und ist vollständig bestimmt durch einen fünften Punkt b oder c ; einem Punkt b entspricht nur ein Punkt c und umgekehrt. Die Punkte b und c bilden auf dem Kegelschnitt S und auf der geraden Linie D zwei projektivische Reihen, welche in m zwei entsprechende Punkte haben und welche durch drei homologe Punktpaare bestimmt sind. Ebenso bestimmt der Büschel $fm, fb, fb', fb'' \dots$ auf dem Kegelschnitt und auf D zwei projektivische Reihen, welche durch dieselben drei Punktpaare bestimmt sind, also gehen $b''c'', b'''c''' \dots$ durch den Punkt f ; alle bc gehen durch f . Die Büschel $(Ab, Ab', Ab'' \dots)$ und $(fc, fc' \dots)$ sind projektivisch; die entsprechenden Strahlen schneiden sich in einem Kegelschnitt, der durch A und f geht und der Kegelschnitt S ist; also liegt f auf S .

1048. Sind die Gleichungen der drei Kreise $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, so sind die Radikalaxen durch die Gleich-

ungen $S_1 - S_2 = 0$, $S_2 - S_3 = 0$, $S_3 - S_1 = 0$, welche sich im Radikalcenrum schneiden, gegeben. Beachtet man Aufg. 394, so findet man, dass D_1 , D_2 , D_3 in einer geraden Linie liegen.

1049. Es sei AB die Axe der y und eine in der Mitte von AB errichtete Senkrechte die Axe der x ; $AB = 2a$.

Die Gleichung der Parabeln ist:

$$(y - mx)^2 + 2\lambda x - a^2 = 0.$$

Die Koordinaten des Brennpunktes sind:

$$x = \frac{a^2(m^2 + 1) - \lambda^2}{2(m^2 + 1)\lambda}, \quad y = \frac{a^2 m(m^2 + 1) + \lambda^2 m}{2(m^2 + 1)\lambda}.$$

Die Koordinaten des Scheitels sind:

$$x = \frac{a^2(m^2 + 1)^2 - m^2\lambda^2}{2\lambda(m^2 + 1)^2}, \quad y = \frac{m(m^2 + 2)\lambda^2 + m(m^2 + 1)^2 a^2}{2\lambda(m^2 + 1)^2}.$$

Der Ort des betreffenden Berührungspunktes ist:

$$y^2 - m^2 x^2 - a^2 = 0.$$

1050. Ist die feste Linie die Axe der x , die Senkrechte vom Mittelpunkt O des Kreises auf die feste Gerade die Axe der y , der Radius gleich r und hat O die Koordinaten o , a , so ist die Gleichung des Ortes: $(y - a)^2 + x^2 = (py + r)^2$.

1051, 1052. Die Gleichung der Hyperbel H ist:

$$ay^2 + m(b + am)x^2 - (b + 2am)xy - aby = 0.$$

Der Ort des Schnittpunktes der Tangente und der Asymptote ist:

$$(x + a)(ay + bx - ab) = 0.$$

Der Ort des Schnittpunktes von PQ mit einer durch O der Asymptoten Parallelen ist:

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

1053, 1054. Die Gleichung der Hyperbel ist:

$$c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

Der Ort von R ist ein Kreis durch den Ursprung:

$$(x^2 + y^2)(a^2 \beta^2 - b^2 \alpha^2) - (a^2 \beta x - b^2 \alpha y) \alpha \beta = 0.$$

Die Scheitel der Parabeln beschreiben den Ort:

$$2(b^2 mx - a^2 y)(bx \pm ay)(a^2 + b^2) - (b^3 m \mp a^3)(ay \pm bx + ab)(ay \pm bx - ab) = 0,$$

welche für $m = \frac{a^3}{b^3}$ resp. $m = -\frac{a^3}{b^3}$ in die Gleichung einer Geraden

$$bx \pm ay = 0$$

übergeht.

1055. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist:

$$x^2 + by^2 = \frac{bn^2}{c+1}.$$

Die Gleichung des Ortes ist:

$$K^2 (x^2 - y^2 + k^2) = n^2 (K^2 - y^2).$$

1056, 1057. Die Gleichungen der Kreise sei:

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 + b^2 = r^2, (x + a')^2 + y^2 = a'^2 + b^2 = r'^2.$$

Die Gleichung von S ist:

$$\begin{aligned} x^2(1 - \lambda \cos \alpha) - xy\lambda \sin \alpha + y^2 - x(2a - \lambda a \cos \alpha - \lambda r) - b^2 &= 0, \\ x^2(1 - \lambda' \cos \alpha') - xy\lambda' \sin \alpha' + y^2 + x(2a' - \lambda' a' \cos \alpha' + \lambda' r') - b'^2 &= 0, \\ \lambda \cos \alpha &= \lambda' \cos \alpha', \quad \lambda \sin \alpha = \lambda' \sin \alpha', \\ \lambda(a \cos \alpha + r) - 2a &= 2a' + \lambda'(r' - a' \cos \alpha'). \end{aligned}$$

Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist:

$$y^2 - x^2 - b^2 = 0,$$

die Gleichung von CD ist:

$$2(x - a) - \lambda \{(x - a) \cos \alpha + y \sin \alpha - r\} = 0,$$

welche durch einen Ähnlichkeitspunkt geht.

Der Ort von K_1, K_2 hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) d^2 &= [(x - a)^2 + y^2] (r \mp r')^2 + 2dr(r \mp r')(x - a) + d^2 r^2, \\ a + a' &= d, \quad \lambda = \frac{2d}{d \cos \alpha + r \mp r'}. \end{aligned}$$

1058. Wenn A_1, B_1, C_1 die Schnittpunkte der Tangentenpaare, welche resp. durch B' und C' , C' und A' , A' und B' gehen, so kann $A'B_1C'A_1B'C_1$ als ein dem Kegelschnitt umschriebenes Sechseck betrachtet werden, also schneiden sich $A'A_1, B'B_1, C'C_1$ in einem Punkte, daher schneiden sich $B'C'$ und $B_1C_1, C'A'$ und $C_1A_1, A'B'$ und A_1B_1 in den Punkten a, b, c , welche in einer geraden Linie liegen.

1059, 1060. In Aufg. 1060 nehme man die Halbierungslinien der Winkel zwischen L und L' zu Koordinatenachsen. Der Kreis K hat die Gleichung:

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \varphi$$

und der Kreis K' die Gleichung:

$$(x - a_1)^2 + y^2 = a_1^2 \sin^2 \varphi.$$

Ist λ der Radius des beweglichen Kreises, dessen Centrum die Koordinaten α, β hat, so ist:

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (a \sin \varphi + \lambda)^2, \quad (\alpha - a_1)^2 + \beta^2 = (a_1 \sin \varphi + \lambda)^2,$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + n, \quad y = \beta, \quad \frac{\beta - \alpha \operatorname{tg} \varphi - n}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \lambda.$$

Man hat:

$$(\alpha - a)^2 + y^2 = (a \sin \varphi + \lambda)^2, \quad (\alpha - a_1)^2 + y^2 = (a_1 \sin \varphi + \lambda)^2,$$

$$y - n = x \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{y - \alpha \operatorname{tg} \varphi - n}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \lambda.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$(x - \alpha) \sin \varphi = \lambda.$$

Aus den Gleichungen für a folgt:

$$(a + a_1) \cos^2 \varphi = 2\alpha + 2\lambda \sin \varphi, \\ aa_1 \cos^2 \varphi = y^2 + \alpha^2 - \lambda^2.$$

Die Gleichung des Ortes ist:

$$4y^2 - 4x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + (a - a_1)^2 \cos^2 \varphi = 0,$$

welche eine Hyperbel darstellt, deren Asymptoten die gemeinschaftlichen Tangenten L, L' sind und welche durch die Schnittpunkte der Kreise geht; hiermit ist sogleich Aufg. 1059 bewiesen.

1061, 1062, 1063. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + p_1 \left(\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{mx}{a^2} - \frac{ny}{b^2} + p \right) = 0.$$

Damit dieser Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, muss sein:

$$p_1 = a^2 b^2 \frac{a^2 + b^2}{a^4 n^2 - b^4 m^2}, \quad p = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Der Ort der Aufg. 1062 ist:

$$x^2 + y^2 - \frac{l}{a^2 + b^2} (b^2 y + a^2 x) = 0.$$

Der Ort der Aufg. 1063 ist:

$$2(a^2 + b^2)xy - \frac{1}{l}(a^2 + b^2 + l^2)(a^2y + b^2x) + 2a^2b^2 = 0,$$

welcher für $l = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ zwei gerade Linien darstellt.

1064. Es sei $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel, k die Projektion einer Seite auf die Direktrix; $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ die Koordinaten von drei aufeinanderfolgenden Ecken.

Die Gleichung der Geraden, welche die beiden letzten Ecken verbindet, ist:

$$(y_3 - y_2)x - (x_3 - x_2)y + x_3y_2 - x_2y_3 = 0$$

oder:

$$x - \frac{y_2 + y_3}{2p}y + \frac{y_2y_3}{2p} = 0,$$

daher:

$$x = \frac{1}{2p}(y_1y_2 + y_1y_3 - y_2y_3),$$

$$x_1 - x = \frac{1}{2p}(y_1^2 - y_1y_2 - y_1y_3 + y_2y_3) = \frac{k^2}{p}.$$

1065. Die Gerade $y = mx$ schneidet die Kreise $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ in den Punkten C, D , deren Ordinaten:

$$y = \frac{mr}{\sqrt{1+m^2}}, \quad y = \frac{mR}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Die Parallele CE trifft die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in E , dessen Abscisse $x = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2(1+m^2) - r^2m^2}{1+m^2}}$ ist.

Ist $m = r$, so wird E die Koordinaten $x = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$, $y = \frac{mb}{\sqrt{1+m^2}}$ haben. Die Normale in E hat die Gleichung:

$$y - \frac{mb}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{am}{b} \left(x - \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} \right),$$

welche die Gerade DF in F :

$$y = \frac{mR}{\sqrt{1+m^2}}, \quad x = \frac{bR + a^2 - b^2}{a\sqrt{1+m^2}} = \frac{bR + c^2}{a\sqrt{1+m^2}}$$

schneidet.

Der Ort ist eine Ellipse, konzentrisch der gegebenen Ellipse, und hat die Gleichung:

$$\frac{a^2 x^2}{(c^2 + bR)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

1066. Ist H der Berührungspunkt von AA' , J der Schnittpunkt von $A'E$ und GD , so ist HJ die Polare von A ; diese Polare schneidet den Kegelschnitt in M und die Tangente $A'D$ in B . Da D der Pol von ADB , so ist AD die Polare von B , also ist BE Tangente an den Kegelschnitt in E . Nach Pascals Satz schneiden BE , AA' , AB' die Seiten HD , DE , EH in den Punkten P , A , C , welche in einer geraden Linie liegen. Es ist C der Pol von BEP , A' der von HD , also $A'FE$ die Polare von P . Diese Polare schneidet GD und HM in J , also geht GM durch P . Die drei Pole P , G , M liegen in einer Geraden, ihre Polaren $A'EF$, die Tangente GR und die Tangente AM gehen durch M .

1067, 1068. Die Koordinaten von S sind:

$$x = (a \cos \varphi + b \sin \varphi) \cos^3 \varphi, \quad y = - (a \cos \varphi + b \sin \varphi) \sin^3 \varphi.$$

Die Gleichung der Parabel ist:

$$(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 - 2 (a \cos \varphi + b \sin \varphi) (x \cos \varphi - y \sin \varphi) + (a \cos \varphi + b \sin \varphi)^2 = 0.$$

Der Ort der Brennpunkte ist:

$$x^2 + y^2 \mp ax \pm by = 0,$$

d. h. ein System von zwei Kreisen mit gleichen Radien.

Die Gleichung der Berührungssehne ist:

$$(x - a) \cos \vartheta + (y + b) \sin \vartheta = 0,$$

sie geht also durch den Punkt $(a, -b)$.

1069. Die Asymptote sei die Axe der x , die Senkrechte von P auf die Asymptote die Axe der y , P habe die Ordinate p , dann ist die Gleichung des Ortes:

$$x^2 + y^2 - 2p(y \pm x) = 0.$$

1070. Die Punkte der Normalen auf der Parabel liegen auf der Hyperbel:

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0.$$

1071. Die Gleichung aller Kegelschnitte ist:

$$xy + (p - \alpha) y - p\beta + \lambda (y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x) = 0.$$

1072. Die Gleichung des gesuchten Ortes ist $y^2 = \frac{2p\alpha}{\alpha - p} x$.

1073. Der Brennpunkt F sei der Koordinatenursprung, die Verbindungslinie der Brennpunkte die Axe der x und eine Senkrechte darauf die Axe der y . Die Gleichung des Kegelschnittes ist:

$$x^2 + y^2 - (ex + p)^2 = 0.$$

Die Gleichungen der festen Axen seien $y = mx$, $y = m'x$. Die Gleichung des Ortes ist:

$$x^2 + y^2 - \frac{(1 + m^2)(1 + m'^2)}{(1 + mm')^2} (ex + p)^2 = 0.$$

1074. Die Gleichung der Tangenten vom Punkt $(0, \alpha)$ an den Kegelschnitt ist:

$$(a\alpha^2 - 2\alpha)(ay^2 + bx^2 + 2hxy - 2y) - [(a\alpha - 1)y + h\alpha x - \alpha]^2 = 0,$$

und die Gleichung der Tangenten vom Punkte $(0, -\alpha)$ an den Kegelschnitt ist:

$$[(h^2 - ab)^2 - 2hx + 1] \alpha^2 - 2(bx^2 + hxy - y) \alpha + y^2 = 0.$$

Eliminiert man α , so erhält man die gesuchte Gleichung.

1075. C sei der Mittelpunkt der Krümmung, welcher auf der gemeinsamen Normalen liegt; man ziehe $CM \perp OB$, $MN \perp OC$; der Punkt N liegt auf der Brennpunktaxe. Man mache $\sphericalangle COD = \sphericalangle COB$, eine Gerade durch N schneide OB und OD in den Punkten F, F' , welches die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind, der OA in O zur Tangente hat und der in diesem Punkte den Krümmungsradius OC hat. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem F und F' auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von OA liegt. Wenn die Gerade durch N parallel einer der Geraden OB, OD ist, so ist der Kegelschnitt eine Parabel.

1076. Es ist bekannt, dass, wenn $S = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes und $P = 0$ die Gleichung einer Geraden ist, die Gleichung $S + \lambda P^2 = 0$ alle Kegelschnitte darstellt, welche mit dem Kegelschnitte $S = 0$ eine doppelte Berührung in der gemeinsamen Sehne $P = 0$ haben. Ferner weiss man,

dass, wenn zwei Kegelschnitte mit einem dritten in doppelter Berührung sind, ihre Berührungssehnens mit diesem und eines von den drei Paaren der Durchschnitssehnens durch einen Punkt gehen.

Die Gleichung der Ellipse sei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, die Gerade $y = mx + n$ bestimmt auf der Ellipse die gegebenen Punkte; α und β seien die Koordinaten des Schnittpunktes der gemeinschaftlichen Tangenten an die Ellipse und einen der Kreise. Die Gleichung dieser Tangenten ist:

$$(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) - (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)^2 = 0.$$

Die Berührungssehne des Kreises und dieser Tangenten muss gehen durch den Schnittpunkt der Berührungssehne $a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 = 0$ und der Geraden $y = mx + n$, ihre Gleichung hat also die Form:

$$a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 + \lambda(y - mx - n) = 0.$$

Die Gleichung:

$$(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) - (a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2)^2 + \mu[a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2 + \lambda(y - mx - n)]^2 = 0$$

stellt also einen Kegelschnitt dar, welcher eine doppelte Berührung mit den beiden Tangenten hat. Dieser Kegelschnitt soll durch die festen Punkte der Ellipse gehen, es ist daher seine Gleichung:

$$(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2) + 2\lambda(y - mx - n)(a^2\beta y + b^2\alpha x - a^2b^2) + \lambda^2(y - mx - n)^2 = 0.$$

Eliminiert man λ , setzt $a^2 - b^2 = c^2$, so ist der Ort des Tangentenschnittpunktes:

$$(m^2a^2 + b^2)(b^2\alpha^2 - m^2a^2\beta^2) - m^2a^2b^2c^2 = 0,$$

welches ein Kegelschnitt ist, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Ellipse mit den geraden Linien:

$$b^2x - ma^2y = 0, \quad b^2x + ma^2y = 0$$

geht. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte mit der Ellipse hat.

Ist statt der Ellipse eine Hyperbel gegeben, so setze man $-b^2$ statt b^2 und der Ort ist eine Ellipse, welche mit der Hyperbel dieselben Brennpunkte hat.

1077, 1078. Ist die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$, so ist die Gleichung von

$$M: y^2 - 4x^2 - 2px = 0, \quad N: y^2 + 4x^2 - 2px = 0.$$

1079. Es giebt sechs Punkte b_{ij} , welche die Ecken eines vollständigen Vierseits sind. Der einfacheren Bezeichnung wegen seien D, E, F die Fusspunkte der durch den Punkt M gehenden drei Normalen und BC, AC, AB drei Tangenten in den Punkten D, E, F des Kegelschnitts; es schneiden sich daher die Geraden AD, BE, CF in einem Punkte. Sind MH, MJ, MG die Senkrechten von M auf EF, FD, ED , so gehen die Geraden DH, EJ, FG durch einen Punkt, d. h. es muss die Gleichung

$$\frac{GD}{GE} \cdot \frac{HE}{HF} \cdot \frac{JF}{JD} = -1$$

bestehen. Es ist aber:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = -1;$$

aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PDG, PEC folgt $\frac{GD}{GP} = \frac{EC}{PE}$,

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PGE, PDC folgt $\frac{GE}{GP} = \frac{DC}{PD}$, also ist:

$$\frac{GD}{GE} = \frac{EC \cdot PD}{DC \cdot PE};$$

ebenso findet man:

$$\frac{HE}{HF} = \frac{FA \cdot PE}{EA \cdot PF},$$

$$\frac{JF}{JD} = \frac{DB \cdot PF}{FB \cdot PD},$$

mithin ist:

$$\frac{GD}{GE} \cdot \frac{HE}{HF} \cdot \frac{JF}{JD} = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = -1.$$

Ferner folgt leicht, dass die konjugierten harmonischen Punkte der Punkte G, H, J in Bezug auf die Punkte $(D, E), (E, F), (F, D)$ in einer geraden Linie liegen.

1080. Zieht man von den Punkten A, B Perpendikel AP, BP auf die Normalen MA, MB , dann sind die Geraden AP, BP Tangenten der Parabel; verbindet man den

Tangentenschnittpunkt P mit dem Mittelpunkt J von AB , so ist PJ der Parabelaxe parallel. Zieht man PN parallel AB , so sind die Geraden PA , PB , PJ , PN vier harmonische Strahlen. Die drei Geraden PA , PB , PN sind resp. senkrecht auf MA , MB , MP_1 des harmonischen Büschels $M(A, B, P_1, P_2)$, die vierten Strahlen PJ und MP_2 sind dann auch aufeinander senkrecht. Der Punkt P_2 liegt also auf dem von M auf die Parabelaxe gefällten Perpendikel.

1081, 1082. Da $AB = BC$, $CD = AD$ ist, so halbiert die Diagonale AD die Winkel B , D . Ist CE die Halbierungslinie des Winkels BCD , so schneidet diese die Gerade AD in einem Punkte E , welcher der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist. Halbiert man den Nebenwinkel von BAD , so schneidet diese Linie AD in einem Punkte E' , welcher das Centrum eines zweiten eingeschriebenen Kreises ist. Der geometrische Ort von E resp. E' ist ein Kreis

1083. Der Ort ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den Geraden g , g' parallel laufen.

1084. Es sei C der Kreismittelpunkt, a sein Radius und $OC = c$; O sei der Ursprung der rechtwinkligen Axen und OC die Axe der x . Der Kreis hat die Gleichung:

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2$$

und die Gerade OS die Gleichung:

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha} = r,$$

wenn OP und OQ die Wurzeln der Gleichung:

$$r^2 - 2cr \cos \alpha + c^2 = a^2$$

sind. Es ist daher:

$$OP = c \cos \alpha + \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + (a^2 - c^2) \sin^2 \alpha},$$

$$OQ = c \cos \alpha - \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + (a^2 - c^2) \sin^2 \alpha},$$

also:

$$OS = mOP + nOQ = c(m+n) \cos \alpha + (m+n) \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + (a^2 - c^2) \sin^2 \alpha}.$$

Die Gleichung von PQ ist:

$$[x - c(m+n)] \cos \alpha + y \sin \alpha = (m - n) \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + (a^2 - c^2) \sin^2 \alpha},$$

welche Tangente an den Kegelschnitt

$$\frac{[x - c(m + n)]^2}{a^2(m - n)^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)(m - n)^2} = 1$$

ist. Macht man $m = 0$, $n = 1$, so erhält man einen bekannten Satz.

1085, 1086. A, B, C seien die drei Normalenfusspunkte und D der Fusspunkt der vierten Normalen; der Einfachheit wegen sei der Kegelschnitt eine Ellipse, deren Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sei; ändert man b^2 in $-b^2$, so erhält man den Fall für die Hyperbel. Der Punkt M habe die Koordinaten x_1, y_1 und die Fusspunkte der vier Normalen sind die Schnittpunkte der Ellipse mit der Hyperbel:

$$c^2xy - a^2x_1y + b^2y_1x = 0.$$

Der dem Dreieck ABC umschriebene Kreis hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0; \quad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = s^2.$$

Aus den drei Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} c^4x^4 - 2a^2c^2x_1x^3 + (a^4x_1^2 + a^2b^2y_1^2 - a^2c^4)x^2 + 2a^4c^2x_1x - a^6x_1^2 &= 0, \\ c^4x^4 - (2a^2c^2x_1 + 2c^4\alpha)x^3 + (4a^2c^2x_1\alpha + 2b^2c^2y_1\beta + c^4s + a^4x_1^2 + b^4y_1^2)x^2 \\ - 2a^2x_1(a^2x_1\alpha + b^2y_1\beta + c^2s)x + a^4x_1^2s &= 0. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Abscissen von A, B, C, D und die zweite die der Punkte A, B, C, D' . Diese beiden Gleichungen haben also drei gemeinsame Wurzeln, deshalb ist:

$$\begin{aligned} 4a^2b^2y_1\alpha(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1) - 4a^2c^2\alpha^2 + m^2 &= 0, \quad t = s + a^2, \\ c^2t + 2b^2y_1\beta - b^2y_1^2 &= m, \\ 4a^2c^4\alpha^2 - 2a^2b^2x_1y_1\alpha\beta + a^2b^2x_1y_1^2\alpha - b^2y_1\beta m - c^2tm &= 0, \\ 4a^2c^4\alpha^2 - c^2tm &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt $4\alpha\beta - x_1y_1 = 0$. Die vier Mittelpunkte der den Dreiecken ABC, ABD, ACD, CDB umschriebenen Kreisen liegen also auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Axen des gegebenen Kegelschnitts sind.

Ferner erhält man die Gleichung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2\beta}{x_1},$$

welche den Winkel, den die Gerade MD mit der Axe der x macht, bestimmt. Hat der Punkt P' , welcher zu dem Punkte P in Bezug auf den Mittelpunkt der ersten Hyperbel symmetrisch liegt, die Koordinaten x', y' , so ist $\frac{y'}{x'} = \frac{2\beta}{x_1}$, d. h. die Gerade OP' ist parallel MD . Die Koordinaten von P sind:

$$x = \frac{x_1 (2a^2\beta + b^2y_1)}{2c^2\beta}, \quad y = -\frac{(2a^2\beta + b^2y_1)}{c^2},$$

also:

$$\frac{y}{x} = \frac{-2\beta}{x_1}.$$

Ist der gegebene Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, so genügen die Koordinaten von D , nämlich:

$$x = \frac{x_1 (2\beta - y_1)}{4\beta}, \quad y = -\frac{2\beta - y_2}{2}$$

der Gleichung von OP ; OP geht in diesem Falle durch den Fusspunkt der vierten Normalen.

1087. Die Normale in M sei die Axe der x und die Tangente in M die Axe der y ; die Gleichung des Kegelschnittes wird sein:

$$ax^2 + 2hxy + y^2 - 2px = 0.$$

Der Mittelpunkt des Kegelschnittes hat die Koordinaten:

$$x = \frac{p}{a - h^2}, \quad y = -\frac{ph}{a - h^2}.$$

Die Tangenten parallel der Normale in M schneiden die Axe der y in zwei Punkten:

$$(h^2 - a)y^2 - 2phy + p^2 = 0.$$

Die Gleichung des Kreises ist:

$$\left(x - \frac{p}{a - h^2}\right)^2 + \left(y + \frac{ph}{a - h^2}\right)^2 = \frac{p^2(1 + a)}{(a - h^2)^2}.$$

Die Koordinaten von N sind:

$$x' = -\frac{p}{1 + h^2}, \quad y' = \frac{hp}{1 + h^2}.$$

Die Gleichung einer Parabel, welche in M die Axe der y zur Tangente hat, kann man schreiben:

$$m^2x^2 + 2mxy + y^2 - 2lx = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der des gegebenen Kegelschnittes folgt $m = h$, $l = p$. Die Koordinaten des Brennpunktes sind daher:

$$x = \frac{p}{2(1+h^2)}, \quad y = \frac{ph}{2(1+h^2)},$$

und der symmetrische Punkt P in Bezug auf die Tangente in M ist der Mittelpunkt von MN .

1088. Sind $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 1$ die beiden Kurven, so ist die Gleichung des Ortes von M :

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 - \lambda^2.$$

1089. Die Gleichung von CD ist:

$$b^2m(a^2 + b^2)x + a^2n(a^2 + b^2)y + b^4m^2 + a^4n^2 = 0.$$

Die Gleichung des Kreises durch $ABCD$ ist:

$$x^2 + y^2 + \frac{m(a^4b^2 + a^2b^4 - b^4m^2 - a^4n^2)x}{a^2(a^2n^2 - b^2m^2)} + \frac{n(a^4b^2 + a^2b^4 + b^4m^2 + a^4n^2)y}{b^2(a^2n^2 - b^2m^2)} = 0.$$

Der Ort von R ist eine gerade Linie.

1090, 1091. Die Seiten AB , AC seien die Koordinatenachsen und $AB = a$, $AC = b$.

Der Ort des Normalendurchschnittspunktes ist:

$$(y - b)b = (x - a)a, \quad (ay + bx - ab = 0).$$

Der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte ist:

$$x^2 - y^2 - \frac{1}{2}(ax - by) = 0.$$

Ist $mx + ny + p = 0$ die Gleichung einer beliebigen Geraden, so ist der gesuchte Ort des Pols:

$$(2p + am)x^2 - (an - bm)xy - (2p + bn)y^2 - apx + bpy = 0.$$

1092, 1093. Nimmt man dasselbe Koordinatensystem wie in Aufg. 1091, so ist die Gleichung aller Hyperbeln:

$$xy - \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{b}{y} - 1 \right) = 0.$$

Der Ort der Scheiteln dieser Hyperbeln ist dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - x + y = 0, \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - x - y = 0.$$

1094, 1095. Setzt man $\operatorname{tg} \alpha = m$, nimmt die Gerade, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten des Trapezes verbindet, zur Axe der x und den Mittelpunkt dieser Geraden zum Ursprung der rechtwinkligen Axen, so sind die Gleichungen der Seiten des Trapezes:

$$y - h = 0, \quad y + h = 0; \quad y + ma - mx = 0, \quad y + ma + mx = 0$$

und die Gleichung des umschriebenen Kegelschnittes ist:

$$m^2 x^2 + (l - 1) y^2 - 2may - m^2 a^2 - lh^2 = 0.$$

Der Ort der Berührungspunkte ist dargestellt durch die Gleichungen:

$$y - mx + ma = 0, \quad y(x + a) = -\frac{h^2}{m}.$$

1096. Vom Punkte O fälle man eine Senkrechte auf die Gerade L , deren Länge b sei; die Gerade AB sei die Axe der x und der Mittelpunkt C von AB sei der Ursprung von rechtwinkligen Axen; die Gleichung des gesuchten Ortes ist:

$$y^2 = qx + (AC)^2.$$

1097. Das Centrum des festen Kreises sei der Koordinatenursprung, dann ist die Gleichung des Ortes:

$$(r'^2 - \alpha^2) x^2 + r'^2 y^2 + 2r^2 \alpha x + r'^2 \alpha^2 - (r'^2 - r^2)^2 = 0,$$

wenn $O'P$ die Axe der x und der feste Punkt $P(\alpha, 0)$ ist.

1098. Die Geraden a und b berühren den Kreis OA in A und B , die Radikalaxe MN der Kreise A_1 und B_1 ist Radikalaxe der Kreise O, A_1, B_1 , zu je zwei genommen. Die Gerade MN geht also durch den Schnittpunkt Q der Tangenten a und b , und die Potenz (Aufg. 394) dieses Punktes

in Bezug auf M , N ist gleich dem Quadrat von QA . Der Ort von M , N ist also ein Kreis, dessen Centrum P auf der Linie A_1B_1 liegt.

1099. Ist $mn > 0$, so ist:

$$m = \frac{-(a + b \cos \varphi) \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$n = \frac{-(b + a \cos \varphi) \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}};$$

ist $mn < 0$, so ist:

$$m = \frac{(a - b \cos \varphi) \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$n = \frac{(b - a \cos \varphi) \mp \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}};$$

1100. Die gegebene Gerade sei die Axe der y und die Senkrechte von dem gegebenen Punkte A auf die gegebene Gerade sei die Axe der x ; der Punkt A habe vom Ursprung die Entfernung a ; es ist die Gleichung des Ortes von M :

$$[(y - x)^2 - a(2x - a)][(y + x)^2 - a(2x - a)] = 0.$$

1101. Wenn man AB zur Axe der x und die Senkrechte in dem Mittelpunkte von AB auf AB zur Axe der y nimmt, AB gleich $2a$ setzt und die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes:

$$x^2 + 2pxy + qy^2 + 2ry - a^2 = 0$$

ist, so ist die Gleichung des Ortes:

$$p(x^2 - y^2) + (q - 1)xy - pa^2 = 0.$$

1102. Der Ort der Tangentendurchschnittspunkte besteht aus vier durch B gehende gerade Linien.

1103, 1104. Die feste Parabel habe die Gleichung $y^2 = 2p'x$ und p sei der Parameter der beweglichen Parabel, es ist dann die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$(y + b)^2 + \frac{4(p + p')}{p'}(px - by + pa) = 0,$$

(a, b) ist der Punkt R . Wird P' zu einer Geraden, so ist die Gleichung des Ortes:

$$(y + b)^2 + 4p(x + a) - 4py = 0.$$

1105, 1106. Siehe 1112.

1107, 1108. Der Ort der Projektion von A ist ein Kreis mit dem Centrum A .

Ist FO senkrecht auf LL' , LL' die Axe der y , FO die Axe der x , $FO = a$, (α, β) der Punkt A , so hat der Ort der Berührungspunkte die Gleichung:

$$ax^2 - \beta xy + \alpha y^2 - a(a + \alpha)x + \alpha a^2 = 0.$$

1109, 1110, 1111. Zieht man $FO \perp L'$, ist L die Axe der y , L die Axe der x , so heisst die Gleichung der Hyperbeln:

$$x^2 + (y - a)^2 = (x + ly)^2,$$

die Gleichung des Ortes von M :

$$x^2 = ay,$$

die Gleichung des Ortes Aufg. 1111:

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

1112, 1113. Diese Aufgaben enthalten die Aufg. 1105, 1106. Der Ort des Punktes P ist ein Kegelschnitt.

Man nimmt am besten an, dass der Punkt A die Koordinaten (o, o) , der Punkt B die Koordinaten (c, o) und der Punkt C die Koordinaten (ξ, η) habe. Die Gleichung des Kreises ist

$$\eta(x^2 + y^2) - cx\eta + cy\xi - y(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Die Gleichung von AB ist $y = 0$, von AC ist $x\eta = y\xi$, von CB ist $\eta x + y(c - \xi) = c\eta$. Die geraden Linien durch M treffen resp. die geraden Linien AB , BC , CA in den Punkten D , F , E . Hat der Punkt M die Koordinaten x' , y' , so sind die Gleichungen von

$$MD: y - y' = -\tan \alpha (x - x'),$$

$$ME: y - y' = \frac{\eta - \xi \tan \alpha}{\xi + \eta \tan \alpha} (x - x'),$$

$$MF: y - y' = \frac{\eta - (\xi - c) \tan \alpha}{\xi - c + \eta \tan \alpha} (x - x').$$

Wenn der Punkt N die Koordinaten x'', y'' hat, so erhält man die Gleichungen der drei geraden Linien durch N , indem man in obigen Gleichungen für MD, ME, MF statt x', y' die Werte x'', y'' einsetzt. Mittels dieser Angaben kann man Aufg. 1112 leicht beweisen.

1114–1117. Der Ort der Punkte D, D' und der der Höhenschnittpunkte der Dreiecke ABD, ABD' besteht in zwei durch A und B gehenden Kreisen. Der Ort der Aufg. 1116, 1117 ist je ein Kreis.

1118. Es giebt zwei höchst einfache elementare Lösungen, mit deren Hilfe man leicht auch den Pol der geraden Linie D in Bezug auf den Kreis O finden kann.

1119. Es sei die Gleichung einer Parabel $\eta^2 - 2p\xi = 0$ und die eines Kreises $\xi^2 + \eta^2 + 2u\xi + 2v\eta + w = 0$.

Die Schnittpunkte beider Kurven sind gegeben durch die Gleichung:

$$\eta^4 + 4p(p+u)\eta^2 + 8p^2v\eta + 4p^2w = 0.$$

Ist y ein Punkt der Parabel und des Oskulationskreises, so hat die Gleichung in η eine dreifache Wurzel und es ist daher:

$$\begin{aligned} y^4 + 4p(p+u)y^2 + 8p^2vy + 4p^2w &= 0, \\ y^3 + 2p(p+u)y + 2p^2v &= 0, \\ 3y^2 + 2p(p+u) &= 0. \end{aligned}$$

Also:

$$u = -p - \frac{3y^2}{2p}, \quad v = \frac{y^3}{p^2}, \quad w = -\frac{3y^4}{4p^2}.$$

Die Gleichung des Oskulationskreises ist:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\left(p + \frac{3y^2}{2p}\right)\xi + 2\frac{y^3}{p^2} - \frac{3y^4}{4p^2} = 0,$$

oder auch:

$$\left(\xi - p - \frac{3y^2}{2p}\right)^2 + \left(\eta - \frac{y^3}{p^2}\right)^2 = \left(p + \frac{3y^2}{2p}\right)^2 + \frac{3y^4}{4p^2} + \frac{y^6}{p^4}.$$

Es sei:

$$\eta = m\xi + \frac{p}{2m}$$

die Gleichung einer Tangente an die Parabel. Damit der Kreis diese Gerade zur Tangente hat, muss sein:

$$y^6 - 3\frac{p}{m}y^5 + 3p^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{m^2}\right)y^4 - \frac{p^3}{m}\left(2 + \frac{1}{m^2}\right)y^3 + \frac{3p^4y^2}{2m^2} - \frac{p^6}{4m^4} = 0.$$

Es ist $\frac{p}{m}$ eine dreifache Wurzel, also folgt hieraus:

$$y^3 + \frac{3p^2}{4}y + \frac{p^3}{4m} = 0,$$

deren Wurzeln imaginär sind. Es giebt also drei imaginäre Oskulationskreise einer Parabel, welche eine Tangente dieser Kurve berühren.

Sind y_1, y_2, y_3 die Ordinaten von drei Oskulationspunkten.

Man hat:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = 0,$$

$$y_1 y_2 y_3 = -\frac{p^3}{4m},$$

ferner:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -\frac{3p^2}{2},$$

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = -\frac{3p^3}{4m},$$

$$y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 = \frac{9p^4}{8},$$

$$y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 = \frac{9p^4}{16},$$

$$y_2 y_3^2 + y_3 y_1^2 + y_1 y_2^2 + y_3 y_2^2 + y_1 y_3^2 + y_2 y_1^2 = \frac{3p^3}{4m}.$$

Die Gleichungen der Tangenten der Parabel in diesen Punkten sind:

$$\eta = \frac{p}{y_1} \xi + \frac{y_1}{2}, \quad \eta = \frac{p}{y_2} \xi + \frac{y_2}{2}, \quad \eta = \frac{p}{y_3} \xi + \frac{y_3}{2}.$$

Die Gleichung der Kegelschnitte, welche diese geraden Linien berühren, ist:

$$\begin{aligned} & l_1^2 \left(\eta - \frac{p}{y_1} \xi - \frac{y_1}{2} \right)^2 - 2l_2 l_3 \left(\eta - \frac{p}{y_2} \xi - \frac{y_2}{2} \right) \left(\eta - \frac{p}{y_3} \xi - \frac{y_3}{2} \right) \\ & + l_2^2 \left(\eta - \frac{p}{y_2} \xi - \frac{y_2}{2} \right)^2 - 2l_3 l_1 \left(\eta - \frac{p}{y_3} \xi - \frac{y_3}{2} \right) \left(\eta - \frac{p}{y_1} \xi - \frac{y_1}{2} \right) \\ & + l_3^2 \left(\eta - \frac{p}{y_3} \xi - \frac{y_3}{2} \right)^2 - 2l_1 l_2 \left(\eta - \frac{p}{y_1} \xi - \frac{y_1}{2} \right) \left(\eta - \frac{p}{y_2} \xi - \frac{y_2}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man $l_1 = y_1, l_2 = y_2, l_3 = y_3$, so erhält man:

$$\left(\xi - \frac{p}{4} \right)^2 + \left(\eta - \frac{p}{4m} \right)^2 = \frac{p^2(1+m^2)}{16m^2}$$

als Gleichung eines Kreises, tangierend die drei geraden Linien, welcher durch den Scheitel und Brennpunkt der Parabel geht.

Die Entfernung des Kreiscentrums von der Geraden $\eta = m\xi + \frac{p}{2m}$ ist:

$$\frac{p(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{16m},$$

womit der Satz bewiesen ist.

1120. Die beiden Senkrechten seien die Koordinatenachsen OX, OY ; r sei der Radius des Kreises, ferner A, B die Berührungspunkte der Parabel mit den Axen und P, Q die Schnittpunkte der dem Kreise und der Parabel gemeinsamen Tangente in M mit den Axen der Koordinaten. Ferner setze man:

$$OA = \alpha, \quad OB = \beta, \quad OP = p, \quad OQ = q.$$

Die Gleichung aller Parabeln, welche die drei Seiten OP, OQ, PQ zu Tangenten haben, hat die Form:

$$\sqrt{\frac{x}{\alpha}} + \sqrt{\frac{y}{\beta}} = 1,$$

wozu die Bedingung $\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} = 1$ gehört. Ferner ist nach Pythagoras:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$$

oder:

$$(MP + MQ)^2 = p^2 + q^2.$$

Man hat aber:

$$MP = p - r, \quad MQ = q - r,$$

also:

$$p + q - 2r = \sqrt{p^2 + q^2},$$

daher:

$$pq = 2r(p + q - r).$$

Sind $MR \perp OX, MS \perp OY$, so ist $\frac{MS}{MQ} = \frac{OP}{PQ}$ oder:

$$x = \frac{p(q-r)}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{p(q-r)}{p+q-2r}.$$

Ebenso erhält man:

$$y = \frac{q(p-r)}{p+q-2r}.$$

Setzt man dies in die Gleichung der Parabel, so bekommt sie die Form:

$$\alpha\beta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2r} \right)^2 = 2.$$

Ist OF senkrecht auf AB , so ist der Parabelbrennpunkt der Schnittpunkt F von AB und OF . Diese beiden Geraden haben aber die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\beta x + \alpha y &= \alpha\beta, \\ \alpha x - \beta y &= 0.\end{aligned}$$

Eliminiert man in den drei letzten Gleichungen α, β , so ist die Gleichung des Ortes der Brennpunkte:

$$x^2 + y^2 - 4r(x + y) + 4r^2 = 0,$$

welche einen Kreis darstellt, der die beiden Senkrechten berührt und den Radius $2r$ hat.

1121. Nach dem Satze von Pascal und dem von Brianchon sieht man leicht ein, dass die geraden Linien einen Kegelschnitt umhüllen.

1122. Es sollen A, B die Berührungspunkte der Hyperbel mit den Axen der Ellipse sein, welche die Richtung OX, OY haben, A', B' die Punkte auf den Asymptoten CX', CY' , in welchen sie die Ellipse berühren, und M, M' die Mittelpunkte von $AB, A'B'$. Die Centra der Ellipse und der Hyperbel seien resp. O, C ; die Gerade OC ist ein beiden Kegelschnitten gemeinsamer Durchmesser, welcher durch M, M' geht. Die Gerade AB schneidet die Asymptoten CX', CY' in den Punkten D, E , so dass $AD = BE$; der Punkt M ist die Mitte von DE , also ist $AB \parallel A'B'$. OM und OB haben gleiche Neigung gegen OA, OB , dasselbe gilt von OM' und $A'B'$. Das Centrum C der Hyperbel ist auf einem der konjugiert gleichen Durchmesser der Ellipse.

1123. Die Gleichungen der Parabeln transformiere man in die Gestalt:

$$y^2 = 2ax, \quad y^2 = 2ax + 4a^2.$$

Es sei $y - \alpha x - \frac{a}{2\alpha} = 0$ die Gleichung der Tangente an die Parabel (1) und $y + \alpha x + \beta = 0$ die Gleichung von PQ . Der Kegelschnitt durch $MNPQ$ hat die Gleichung:

$$m(y^2 - 2mx - 4m^2) + \left(y - \alpha x - \frac{m}{2\alpha}\right)(y + \alpha x + \beta) = 0,$$

welche einen Kreis darstellt, wenn $m = -(1 + \alpha^2)$ ist. Die Gleichung des Kreises ist:

$$\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \left(\alpha\beta - \frac{3a}{2} - 2a\alpha^2 \right) x + \left(\frac{b}{2\alpha} - \beta \right) y + \frac{\beta a}{2\alpha} - 4a^2(1 + \alpha^2) = 0.$$

Da der Kreismittelpunkt auf MN liegt, so sind dessen Koordinaten durch die Gleichungen:

$$2\alpha^2 x + \alpha\beta - \frac{3a}{2} - 2a\alpha^2 = 0,$$

$$2\alpha^2 y + \frac{a}{2\alpha} - \beta = 0,$$

$$y - \alpha x = \frac{a}{2\alpha}$$

bestimmt. Hieraus erhält man:

$$\alpha^2 (4a\alpha^2 + c - 2\alpha\beta) + 4c\alpha^2 + c - 2\alpha\beta = 0,$$

$$(\alpha^2 + 1) (4a\alpha^2 + c - 2\alpha\beta) = 0,$$

$$4a\alpha^2 + c - 2\alpha\beta = 0.$$

Die letzte Gleichung sagt aus, dass die gerade Linie PQ Tangente an die zweite Parabel ist. Der Kreis, beschrieben über MN als Durchmesser, berührt also die zweite Parabel.

1124. Der Ort des Punktes m geht durch die Ecken des Dreiecks und schneidet jeden Radius des Kreises in zwei Punkten. Hat das Dreieck die Ecken A, B, C und der Kreis den Mittelpunkt O und ist das Dreieck gleichseitig, so schneidet der Ort die Radien AO, BO, CO in Punkten A_1, B_1, C_1 , so dass ist:

$$AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

Die Punkte A_1, B_1, C_1 liegen auf einem Kreise um den Punkt O .

Nimmt man auf dem gegebenen Kreise drei Punkte A', B', C' so, dass ist $AA' = BB' = CC'$, so erhält man für die entsprechenden Punkte m drei Punkte, welche auf einem dem gegebenen Kreise konzentrischen Kreise liegen. Der Ort von m ist also kein Kegelschnitt.

Die Gleichung des Kreises sei in Punktkoordinaten:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Dreiecksseiten haben die Linienkoordinaten $u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3$, der dem Kegelschnitt und dem Kreise gemeinschaftliche Berührungspunkt sei x_1, y_1 . Zur Bestimmung des Kegelschnittes bestehen die Gleichungen:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = f(x, y) = 0,$$

$$f(x_1, y_1) = 0, \quad x_1^2 + y_1^2 = 0,$$

$$A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1v_1 + A_{22}v_1^2 + 2A_{13}u_1 + 2A_{23}v_1 + A_{33} = \varphi(u_1, v_1) = 0,$$

$$\varphi(u_2, v_2) = 0, \quad \varphi(u_3, v_3) = 0, \quad \varphi(x_1, y_1) = 0,$$

wenn die A die Grössen der Aufg. 551 sind.

Die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher den Kreis im Punkte x', y' berührt, ist auch:

$$-r^2 + x^2 + y^2 = (xx' + yy' - r^2)(lx + my + n);$$

die Grössen l, m, n sind so zu bestimmen, dass die Seiten des Dreiecks Tangenten an den Kegelschnitt sind.

1125, 1126. Ist AC die Axe der x , AB die Axe der y und ist die Gleichung von $BC: x + by = c$, und hat P die Koordinaten μ, ν , so sind die Gleichungen der drei Geraden $PC': y = \nu$, $PA': x = \mu$, $PB': x + by = \mu + \nu b$. Die Koordinaten von C', A', B' sind $C': x = 0, y = \nu$; $A': x = \mu, y = \frac{c - \mu}{b}$;

$B': x = \mu + \nu b, y = 0$. Damit diese drei Punkte in einer geraden Linie liegen, muss sein:

$$\mu^2 + \mu\nu b + \nu^2 b^2 - c\mu - cb\nu = 0.$$

Der Punkt P liegt also auf einer Ellipse, welche durch die Ecken des Dreiecks geht. Ist das Dreieck gleichschenkelig, so wird die Ellipse zu dem diesem Dreieck umschriebenen Kreis.

1127. Nach Aufg. 735 ist der Ort ein Kegelschnitt; auf den Dreieckseiten liegen projektivische Punktreihen.

1128. Der Ort ist eine Hyperbel, deren Asymptoten durch O gehen und die Richtung OR, OS haben, wenn R der Mittelpunkt des Kreises ist und OS parallel D läuft.

1129. Diese Aufgabe kann man folgendermassen aussprechen: Welches ist die Enveloppe der Kegelschnitte, die durch drei Punkte gehen und ein festes Segment harmonisch teilen. Haben die Dreieckseiten die Gleichungen:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

so heisst die Gleichung aller durch die Ecken gehenden Kegelschnitte:

$$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Sind die Koordinaten der festen Punkte x', y' ; x'', y'' , so haben die dem Doppelverhältnis entsprechenden Teilpunkte die Koordinaten $x' + cx''$, $y' + cy''$; $-x' + cx''$, $-y' + cy''$. Setzt man x', y' in die Gleichung einer geraden Linie $x_n = 0$, so soll dies durch x'_n angedeutet werden und ähnlich, wenn man x', y' durch die anderen Koordinaten ersetzt. Nach der Aufgabe ist dann:

$$0 = a_{23} (cx''_2 + x'_2) (cx''_3 + x'_3) + a_{31} (cx''_3 + x'_3) (cx''_1 + x'_1) + a_{12} (cx''_1 + x'_1) (cx''_2 + x'_2),$$

$$0 = a_{23} (cx''_2 - x'_2) (cx''_3 - x'_3) + a_{31} (cx''_3 - x'_3) (cx''_1 - x'_1) + a_{12} (cx''_1 - x'_1) (cx''_2 - x'_2),$$

mithin ist:

$$0 = \begin{vmatrix} x_2 x_3, & x_3 x_1, & x_1 x_2 \\ (cx''_2 + x'_2) (cx''_3 + x'_3), & (cx''_3 + x'_3) (cx''_1 + x'_1), & (cx''_1 + x'_1) (cx''_2 + x'_2) \\ (cx''_2 - x'_2) (cx''_3 - x'_3), & (cx''_3 - x'_3) (cx''_1 - x'_1), & (cx''_1 - x'_1) (cx''_2 - x'_2) \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt:

$$b_1 x_1'^2 x_2 x_3 + b_2 x_2'^2 x_3 x_1 + b_3 x_3'^2 x_1 x_2 = 0,$$

$$b_1 x_1''^2 x_2 x_3 + b_2 x_2''^2 x_3 x_1 + b_3 x_3''^2 x_1 x_2 = 0,$$

d. h. alle dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte schneiden sich noch in dem Schnittpunkte dieser beiden festen Kegelschnitte.

1130. Die Gleichung von konfokalen Kegelschnitten ist:

$$\frac{x^2}{a^2 - l} + \frac{y^2}{b^2 - l} = 1.$$

Die Gleichung der festen Geraden ist $Ax + By + C = 0$. Die Pole liegen auf der geraden Linie, deren Gleichung

$$\frac{x}{A(b^2 - a^2)} - \frac{Cy}{B(b^2 - a^2)} - 1 = 0$$

ist.

1131, 1132. Die dritte Ellipse erhält man auf folgende Weise. Man bilde das Rechteck $ACBD$ aus den Seiten AC und CB , ebenso aus CA_1 , CB_1 das Rechteck $A_1CB_1D_1$ und verbinde D mit D_1 ; dann lege man durch C eine gerade Linie, welche mit CA denselben Winkel bildet, wie DD_1 mit D_1A_1 ; diese Gerade schneidet DD_1 in einem Punkte D_2 , dessen Projektionen auf die Koordinatenachsen zwei Scheitel der Ellipse

$A_2 P_2 B_2$ sind. Wird CA_2 und CB_2 zu Null, so ist $a_1 : a = b_1 : b$, die Ellipsen sind ähnlich und PP_1 geht durch den Koordinatenursprung. Ist $a_1 - a = b_1 - b$, so werden CA_2 und CB_2 unendlich gross, und zwar so, dass $CA_2 - CB_2 = \frac{a - b}{2}$ ist; schneidet in diesem Falle PP_1 die Axen in den Punkten R, R_1 , so ist immer $RR_1 = a - b$. Diese Konstruktion kann man für die Hyperbel modifizieren; für die Konstruktion der Halbachsen CA_2 und CB_2 ist D_2 der Fusspunkt der Senkrechten von C an DD_1 , mithin ist CD_2 eine Asymptote der dritten Hyperbel. Ist in diesem Falle $a_1 : a = b_1 : b$, dann verschwinden CA_2, CB_2 , und die gerade Linie PP_2 geht immer durch C . Ist $a_1 - a = b_1 - b$, so wird $CA_2 = CB_2$.

1133. Die reciproke Polare eines Kreises ist ein Kegelschnitt, welcher den Ursprung, den Mittelpunkt von O , zum Brennpunkt und die dem Centrum entsprechende gerade Linie zur Direktrix hat. Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, jenachdem der Ursprung innerhalb des Kreises, auf dem Kreise, oder ausserhalb desselben liegt. Siehe Aufg. 532.

1134, 1135. Man setze in Aufg. 351, 352 „Kegelschnitt“ statt „Kreis“.

1136, 1137. Die Gleichung des Tangentenpaares vom Punkte x_1, y_1 an den Kreis:

$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

ist:

$$\{K_1 + K_1^1 - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2\}^2 - 4K_1K_1^1 = 0,$$

$$K_1^1 \equiv (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 - r_1^2.$$

Dieses Tangentenpaar wird den Kreis

$$K_2 \equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2$$

berühren, wenn der Punkt x_1, y_1 ein Ähnlichkeitspunkt beider Kreise ist. Für den äusseren Ähnlichkeitspunkt ist:

$$x_1 = \frac{\frac{a_1}{r_1} - \frac{a_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}, \quad y_1 = \frac{\frac{b_1}{r_1} - \frac{b_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}.$$

Setzt man dies ein, so erhält man nach einiger Rechnung die Gleichung des äusseren Tangentenpaares der Kreise:

$$K_1^2 + K_2^2 + \underbrace{\{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 - (r_1 - r_2)^2\}}_{q^2} - 2K_1K_2 - 2(K_1 + K_2)q = 0$$

oder:

$$(K_1^{\frac{1}{2}} + K_2^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})(K_1^{\frac{1}{2}} + K_2^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}})(K_1^{\frac{1}{2}} - K_2^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})(-K_1^{\frac{1}{2}} + K_2^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Ein Punkt liegt auf dem durch diese Gleichung dargestellten Tangentenpaare, wenn seine Koordinaten x, y einen der vier Faktoren verschwinden macht. Die Grösse $\sqrt{q}$ ist die Entfernung der Berührungspunkte einer äusseren Tangente. Die Gleichung des äusseren Tangentenpaares geht in die Gleichung des inneren Tangentenpaares über, wenn man $-r_1$ für r_1 einsetzt, wodurch sich nur q ändert.

Drei Kreise sind gegeben durch $K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = 0$; es seien $x_1 = 0, y_1 = 0$ die gemeinschaftlichen Tangenten zu $K_2 = 0, K_3 = 0$; ferner seien $x_2 = 0, y_2 = 0$ die gemeinschaftlichen Tangenten zu $K_1 = 0, K_3 = 0$ und $x_3 = 0, y_3 = 0$ die gemeinschaftlichen Tangenten zu $K_1 = 0, K_2 = 0$.

Die geraden Linien $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ sollen durch einen Punkt gehen.

Die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten haben die Formen:

$$K_2^{\frac{1}{2}} + K_3^{\frac{1}{2}} = q_1^{\frac{1}{2}}, \quad K_3^{\frac{1}{2}} + K_1^{\frac{1}{2}} = q_2^{\frac{1}{2}}, \quad K_1^{\frac{1}{2}} + K_2^{\frac{1}{2}} = q_3^{\frac{1}{2}}.$$

Die Bedingung, dass die geraden Linien $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ durch einen Punkt gehen, ist:

$$q_1^{\frac{1}{2}} \pm q_2^{\frac{1}{2}} = q_3^{\frac{1}{2}}.$$

Aus den Gleichungen der gemeinsamen Tangenten folgt, dass mit Erfüllung dieser Bedingung auch die Tangenten $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$ durch einen Punkt gehen.

Die Lösung der Aufg. 1136 ist: Man konstruiere die eingeschriebenen Kreise der Dreiecke, welche von je einer Seite des gegebenen Dreiecks und den Halbierungslinien der anliegenden Winkel gebildet werden; diese Kreise haben drei gemeinschaftliche Tangenten, welche durch einen Punkt gehen; es gehen also auch andere gemeinschaftliche Tangenten durch

einen Punkt, welche die gemeinschaftlichen Tangenten der gesuchten Kreise sind.

Die vorliegende Aufgabe kann als ein spezieller Fall von der folgenden angesehen werden:

Drei Kreise sind gegeben, man soll drei andere Kreise beschreiben, die einander berühren und von denen jeder zwei der gegebenen Kreise berührt, jedoch so, dass auch jeder der drei gegebenen Kreise zwei von den zu suchenden Kreisen berührt.

Nimmt man in dieser Aufgabe an, die drei gegebenen Kreise schnitten einander so, dass sie mehrere krummlinige Dreiecke bilden, hält dann die Eckpunkte A, B, C eines solchen Dreiecks fest und lässt die Kreise, durch unendliche Zunahme, in gerade Linien übergehen, so erhält man aus dieser Aufgabe die Aufg. 1136.

Die Lösung der allgemeineren Aufgabe erhält man aus folgenden Angaben:

a) Zieht man aus einem Ähnlichkeitspunkt A_1 oder J_1 zweier gegebener Kreise K_1, K_2 mit den resp. Mittelpunkten M_1, M_2 irgend eine gerade Linie A_1AB oder AJ_1C , welche die Kreise in AB bez. AC schneidet, so ist das Produkt $A_1A \cdot A_1B$ oder $AJ_1 \cdot CJ_1$ aus den Abständen des Ähnlichkeitspunktes von zwei Durchschnittspunkten A und B oder A und C der geraden Linie und der beiden Kreise, deren zugehörigen Radien M_1A und M_2B oder M_1A und M_2C nicht parallel sind, von konstanter Grösse. Dieses konstante Produkt heisst gemeinschaftliche Potenz der beiden gegebenen Kreise K_1, K_2 , in Bezug auf ihren Ähnlichkeitspunkt A_1 oder J_1 . Die um die Ähnlichkeitspunkte A_1 und J_1 beschriebenen Kreise, deren Radien, ins Quadrat erhoben, gleich sind den gemeinschaftlichen Potenzen der gegebenen Kreise K_1, K_2 in Bezug auf die Punkte A_1, J_1 , heissen Potenzkreise der beiden gegebenen Kreise K_1, K_2 .

Zwei Kreise $K_1 = 0, K_2 = 0$ bestimmen den Büschel $mK_1 + nK_2 = 0$, drei Kreise $K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = 0$ bestimmen das Netz $mK_1 + nK_2 + lK_3 = 0$.

Alle Kreise des Netzes werden von dem Orthogonalkreise der gegebenen Kreise rechtwinklig geschnitten. Kreise des Netzes, welche durch einen Punkt gehen, gehören einem

Büschel an. Zwei beliebige Schnittpunktpaare von Kreisen des Netzes liegen wieder auf einem Kreise des Netzes. Das Netz dreier Kreise fällt zusammen mit allen Kreisen, welche ihren Orthogonalkreis rechtwinklig schneiden.

Alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise unter gleichem Winkel schneiden, zerfallen in zwei Netze, deren Orthogonalkreise die Potenzkreise der gegebenen sind. Diese beiden Netze haben einen Büschel gemein, der den ganzen Büschel der gegebenen orthogonal schneidet.

Alle Kreise, welche drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneiden, zerfallen in vier Büschel, welche den Orthogonalkreis der gegebenen Kreise enthalten; jeder Büschel ist rechtwinklig zu einer Gruppe von drei Potenzkreisen der gegebenen, welche selbst einen Büschel bilden.

Zwei Büschel, die je eine Gruppe von drei Kreisen eines Netzes gleichwinklig schneiden, werden, da sie den Orthogonalkreis enthalten, gleichzeitig von einem Kreise des Netzes rechtwinklig geschnitten.

b) Die drei Kreise K_1, K_2, K_3 berühren sich gegenseitig; es werden K_2, K_3 noch von einem Kreise A_1 , K_1, K_3 noch von einem Kreise A_2 berührt. Man lege einen Kreis C_1 durch die vier Punkte, in denen A_1 und K_1 von K_2 und K_3 berührt werden, und einen Kreis C_2 durch die vier Punkte, in denen A_2 und K_2 von K_1 und K_3 berührt werden. Dann haben C_1 und C_2 ausser dem Berührungspunkte von K_1 und K_2 noch den Schnittpunkt P . Transformiert man von diesem Punkte P aus die Figur durch reciproke Radien, so erhält man eine neue, in der C_1 und C_2 gerade Linien sind. In der neuen Figur sind die in A_1 und A_2 nach den Berührungspunkten mit K_3 gezogenen Radien der Centrale von K_1 und K_2 parallel und gehören also einem Durchmesser von K_3 an. Ferner ist der Radius von K_3 , welcher nach dem Berührungspunkt mit K_2 geht, der Centrale von A_2 und K_1 parallel, also gleich der Summe der Radien von A_2, K_1 und K_2 . Ebenso ist der Radius von K_3 gleich der Summe der Radien von A_1, K_1 und K_2 , also sind die Radien der Kreise A_1 und A_2 einander gleich. Es ist daher ein Potenzkreis von A_1 und A_2 eine gerade Linie

und parallel der gemeinsamen Tangente von K_1 und K_2 in ihrem Berührungspunkte. Transformiert man zurück, so findet man: der Potenzkreis von A_1 und A_2 geht durch den Schnittpunkt P von C_1 und C_2 und wird in P von einem Kreise N_3 des Büschels $K_1 K_2$ berührt.

c) Hat man wie in *b.* drei Kreise K und drei Kreise S , welche resp. den Büscheln der K angehören und selbst einen Büschel bilden, so dass zwei von ihnen beliebig sind, und konstruiert man zwei Kreise F_1 und A_1 so, dass sie sich einander und ausserdem F_1 die Kreise S_2 und S_3 gleichartig mit K_1 , A_1 die Kreise K_2 und K_3 berühren, so liegt der Berührungspunkt von F_1 und A_1 auf S_1 . Transformiert man nämlich die Figur von einem Schnittpunkte der S durch reciproke Radien, so werden die S gerade Linien: Es geht S_1 durch den Schnittpunkt gleichartiger Tangenten, d. h. durch den Ähnlichkeitspunkt von K_1 und F_1 ; es ist aber S_1 die Radikalaxe der Kreise K_2 und K_3 und geht durch den Ähnlichkeitspunkt von A_1 und K_1 , daher geht S_1 auch durch einen Ähnlichkeitspunkt, den Berührungspunkt von A_1 und F_1 , womit die Behauptung bewiesen ist.

d) Es seien drei Kreise A_1, A_2, A_3 gegeben. Drei Kreise K_1, K_2, K_3 sollen die nach der Aufgabe zu bestimmenden sein, ferner seien P die Potenzkreise der A und C , N die Kreise nach *b.* Der Kreis C_1 schneidet A_1 und K_1 , mithin nach *b.* auch N_2 und P_2 , N_3 und P_3 alle unter demselben Winkel, ebenso C_2 die Kreise $A_2, K_2, N_1, P_1, P_3, N_3$. Nach *a.* giebt es einen Kreis H_3 im Netze der A , der die beiden Kreisbüschel rechtwinklig schneidet, die resp. mit C_1 und C_2 gleichartig die Gruppen der Kreise $A_1 P_2 P_3$ und $A_2 P_1 P_3$ gleichwinklig schneiden. Dieser Kreis H_3 kann konstruiert werden. Da er C_1, C_2, N_3 rechtwinklig schneidet, so entsteht aus P_3 , wenn man diesen Kreis über H_3 transformiert, ein Kreis S_3 , welcher dem Büschel von K_1 und K_2 angehört.

e) Wenn die A gegeben, die K als gefunden gedacht sind, so kann man nach *c.* die Kreisgruppen S und F auf verschiedene Art anbringen und durch passende Wahl der S die F und so aus diesen wieder jene zu bestimmen suchen. Nun

kann man zwei S beliebig, also senkrecht zum Orthogonalkreis O der A annehmen, wobei der dritte Kreis S rechtwinklig zu O wird. Der Kreis O schneidet die drei Kreise S_1 , S_2 und A_3 rechtwinklig; ferner werden nach b . S_1 , S_2 und A_3 von C_3 unter gleichen Winkeln geschnitten und von F_3 nach der Konstruktion berührt, mithin gehören O , F_3 und G_3 demselben Kreisbüschel an, der nach b und d auch P_1 unter P_2 unter gleichem Winkel schneidet. Es berührt also F_3 auch P_1 und P_2 . Die Kreise S in e und d sind dieselben. Nach a ist in d der Kreis H_3 orthogonal zu O , und da S_3 aus P_3 über H_3 transformiert ist, schneidet S_3 auch O unter demselben Winkel, wie P_3 es thut, das ist unter einem rechten.

Um also zu den Kreisen A drei andere Kreise K zu finden, die sich gegenseitig und je zwei A berühren, verfährt man folgendermassen:

Man konstruiert drei Potenzkreise P der A , die einen Büschel bilden, P_1 zu A_2 und A_3 u. s. w.; man konstruiert einen Berührungskreis F_1 zu A_1 , P_2 , P_3 und analog F_2 und F_3 ; man konstruiert einen Kreis S_1 , der F_2 und F_3 berührt und durch den Berührungspunkt von F_1 mit A_1 geht. Der Kreis S_1 berührt die gesuchten Kreise K_2 und K_3 .

Dieser Satz lässt sich auf Kegelschnitte übertragen, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt in doppelter Berührung sind.

Drei Kegelschnitte $S - x_1^2 = 0$, $S - x_2^2 = 0$, $S - x_3^2 = 0$, $x_n = x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - \delta$, welche mit einem gegebenen Kegelschnitte eine doppelte Berührung haben, werden von drei gemeinschaftlichen Sehnen, wie $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_1 = 0$ in sechs Punkten geschnitten, die auf einem Kegelschnitte liegen. Denn es ist:

$$\begin{aligned} S + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 &= (S - x_1^2) + (x_1 + x_2)(x_1 + x_3), \\ &= (S - x_2^2) + (x_2 + x_1)(x_2 + x_3), \\ &= (S - x_3^2) + (x_3 + x_2)(x_1 + x_3). \end{aligned}$$

Wenn also von jenen Punkten drei in einer geraden Linie liegen, so liegen die andern gleichfalls in einer geraden Linie. Wenn man diese Gleichungen in Linienkoordinaten

interpretiert oder durch die Methode der reciproken Polaren übersetzt, so erhält man einen zweiten Satz, welcher mit Hilfe des ersten die Aufg. 1136 und ihre Lösung von den Kreisen auf Kegelschnitte überträgt, die mit einem gegebenen Kegelschnitt in doppelter Berührung sind.

Eine elementare Lösung der Aufg. 1136 ist folgende.

Die Seiten des Dreiecks seien a, b, c ; man setze $a + b + c = 2s$,
 $a = s \cdot \sin^2 \varphi$, $b = s \cdot \sin^2 \chi$, $c = s \cdot \sin^2 \psi$, $\varphi + \psi + \chi = 2\sigma$.

Die Winkel des Dreiecks seien:

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad C = \gamma.$$

Es seien K und L die Mittelpunkte der beiden Kreise, welche $BC = a$ in H und M berühren; und der dritte Kreis berühre $AB = c$ in N . Setzt man:

$$BM = y, \quad CH = z, \quad AN = x,$$

so ist:

$$LM = y \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad KH = z \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Da ist:

$$KL = y \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + z \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \quad HM = a - y - z,$$

so ist:

$$\left(y \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + z \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 = (a - y - z)^2 + \left(z \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - y \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right)^2,$$

oder:

$$y + z + 2 \sqrt{yz \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = a.$$

Es ist aber:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$

daher:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{a}{s} = \cos^2 \varphi.$$

Es ist also:

$$y + z + 2 \sqrt{yz} \cos \varphi = s \cdot \sin^2 \varphi$$

und ebenso:

$$z + x + 2 \sqrt{zx} \cos \chi = s \cdot \sin^2 \chi,$$

$$x + y + 2 \sqrt{yx} \cos \psi = s \cdot \sin^2 \psi.$$

Es ist aber:

$$\sin^2(\sigma - \chi) + \sin^2(\sigma - \psi) + 2 \sin(\sigma - \chi) \sin(\sigma - \psi) \cos \varphi = \sin^2 \varphi,$$

$$\sin^2(\sigma - \psi) + \sin^2(\sigma - \varphi) + 2 \sin(\sigma - \varphi) \sin(\sigma - \psi) \cos \chi = \sin^2 \chi,$$

$$\sin^2(\sigma - \varphi) + \sin^2(\sigma - \chi) + 2 \sin(\sigma - \varphi) \sin(\sigma - \chi) \cos \psi = \sin^2 \psi,$$

also ist:

$$x = s \cdot \sin^2(\sigma - \varphi),$$

$$y = s \cdot \sin^2(\sigma - \chi),$$

$$z = s \cdot \sin^2(\sigma - \psi).$$

Man beschreibt über $CF = s$ einen Halbkreis, trägt auf der Seite $BC = a$ die Seiten $CD = c$ und $CE = b$ ab und bestimmt in der Peripherie des Halbkreises die Punkte D', E', B' senkrecht über D, E, B , womit man die Bogen

$$CB' = 2\varphi, \quad CE' = 2\chi, \quad CD' = 2\psi$$

erhält. Macht man Bogen $B'G =$ Bogen $D'E'$, halbiert man den Bogen CG in H' , so geht das Lot $H'H$ durch den Berührungspunkt des Kreises um K und der Seite BC .

1138—1141. Nach Aufg. 906 resp. 1001 ist die Länge ϱ eines Krümmungsradius gleich $\frac{n^3}{p^2}$, wenn n die Normalenlänge zwischen Kurvenpunkt und dem Schnittpunkte mit der grossen Axe und p der Parameter der Kurve ist. Ist α der Winkel, den die Tangente in M mit Ox bildet, und C der Krümmungsmittelpunkt, so ist in dem Dreieck MKC

$$MK = \varrho \sin 2\alpha.$$

Ferner in dem Dreiecke $MM'K$ ist:

$$\frac{MK}{\sin \beta} = \frac{2x'}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad MK = \frac{2x'}{\sin \alpha \cotg \beta + \cos \alpha},$$

wenn $\sphericalangle MOx = \beta$ und x', y' die Koordinaten von M sind.

Es ist auch:

$$\cotg \beta = \frac{x'}{y'}, \quad MA = \frac{y'}{\sin \alpha}, \quad MB = \frac{x'}{\cos \alpha},$$

also.

$$\varrho = \frac{2x'y'}{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Ist $OJ \perp AB$, so ist:

$$OJ = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

mithin:

$$\varrho = \frac{MA \cdot MB}{OJ}.$$

Diese Formel beweist Aufg. 1140.

Für die Parabel erhält man ebenso:

$$\varrho = \frac{MA}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha},$$

wenn MA die Länge der Tangente zwischen dem Punkte M und dem Schnittpunkte mit der Axe und α der Winkel zwischen MA und Ox ist.

1142. Nimmt man in Aufg. 1050 als Gleichung der festen Geraden $x - a = 0$, so heisst die Gleichung des Ortes:

$$y^2 + x^2 = [p(x - a) + r]^2.$$

Diese Gleichung kann man schreiben:

$$x^2 + y^2 - r^2 = p(x - a)[p(x - a) + 2r].$$

Diese Form zeigt, dass der Kegelschnitt durch die gemeinsamen Punkte des Kreises

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

mit den geraden Linien

$$x - a = 0, \quad p(x - a) + 2r = 0$$

geht

1143. Es sei M ein Punkt einer Kurve, MT die Tangente, C der Krümmungsmittelpunkt; man ziehe eine Sehne AB parallel der Tangente, so dass AB sehr nahe am Punkte M liegen; durch A , B und M lege man eine Parabel, welche in M die Tangente MT hat. Ist R die Mitte von AB , so ist MR ein Durchmesser der Parabel, konjugiert dem Durchmesser, welcher MT parallel geht. Gehen jetzt AB gegen M , so wird die Parabel zur oskulierenden Parabel und MR wird die Tangente MP an die Kurve der Punkte R . Trägt man auf der Normale von M aus, in entgegengesetzter Richtung von MC , die Länge $\frac{1}{2} MC = MD$ ab, so ist die Senkrechte

von D auf MP die Direktrix. Den Brennpunkt der Parabel findet man dadurch, dass man auf dem Kreise mit dem Mittelpunkt M und der Direktrix als Tangente einen Punkt so bestimmt, dass $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CMF$ wird.

1144. Die Gleichung der Ellipse sei auf ihre Axen bezogen; irgend ein Punkt einer Normale habe die Koordinaten α, β und ihr Fusspunkt die Koordinaten x_1, y_1 .

Es ist dann:

$$(a^2 - b^2) x_1 y_1 + b^2 \beta x_1 - a^2 \alpha y_1 = 0.$$

Setzt man hier $\frac{ay'}{b}$ statt x_1 und $-\frac{bx'}{a}$ statt y_1 , so erhält man:

$$(a^2 - b^2) x' y' - a^2 y' \frac{a}{b} \beta - b^2 x' \frac{a}{b} \alpha = 0.$$

Die Normalen gehen also durch denselben Punkt.

1145. Setzt man in Aufg. 1144: $\frac{a^2}{x}$ statt x_1 und $\frac{b^2}{y}$ statt y_1 , so erhält man die Gleichung:

$$a^2 - b^2 + \beta y - \alpha x = 0.$$

Der Punkt $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}$ ist die vierte Ecke eines Rechtecks, gebildet über den Axen der Ellipse mit der Tangente im Punkte x_1, y_1 als Diagonale.

Die vier Punkte, betrachtet als Punkte der Normalen von α, β , sind also auf einer durch die Gleichung dargestellten geraden Linie gelegen. Die Mitte der Diagonalen des Rechtecks, d. h. die Mitte der von den Axen begrenzten Tangentenabschnitte liegen auf der geraden Linie, welche Polare des Punktes α, β in Bezug auf die mit der Ellipse konfokale gleichseitige Hyperbel.

1146. Nimmt man die Bezeichnung der Aufg. 1144, so lautet die Gleichung der Normalen:

$$\frac{\alpha - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\beta - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = k.$$

Ändert der Punkt $A (x_1, y_1)$ seine Lage auf der Ellipse so, dass k konstant bleibt, so muss der Punkt (α, β) den beiden Gleichungen:

$$\alpha = x_1 \frac{a^2 + k}{a^2}, \quad \beta = y_1 \frac{b^2 + k}{b^2}$$

genügen und er beschreibt eine Ellipse, deren Gleichung:

$$\frac{a^2 \alpha^2}{(a^2 + k)^2} + \frac{b^2 \beta^2}{(b^2 + k)^2} = 1$$

ist. Durch einen gegebenen Punkt (α, β) gehen vier dieser Ellipsen. Einem bestimmten Wert von k entspricht eine der Ellipsen. Ist umgekehrt der Punkt α, β auf eine der Ellipsen gegeben, so ist eine der Normalen von P gezogen vor den drei andern ausgezeichnet, weil die Koordinaten des Fusspunktes dieser Normale durch obige Gleichungen, in denen α, β, k bekannt sind, gegeben sind. Sei diese ausgezeichnete Normale PA , deren Fusspunkt $A (x_1, y_1)$ sich unabhängig von den drei andern Normalen aus P erhält, und B, C, D die Fusspunkte der andern Normalen. Wenn der Punkt P sich auf der Ellipse E bewegt, so ändert sich das Dreieck BCD ; die Normale im Punkte B der gegebenen Ellipse schneidet die Ellipse E in zwei Punkten P, Q ; diese Normale kann man als die ausgezeichnete Normale in betreff des Punktes Q betrachten; es entspricht also einer Lage des Punktes B nur ein Dreieck BCD ; das Dreieck umhüllt also einen Kegelschnitt L , welcher der Lage nach gleiche Axen mit gegebener Ellipse hat. Hieraus folgt der Satz.

1147, 1148. Ist die Bezeichnung dieselbe wie in Aufg. 1146, so geht die gleichseitige Hyperbel

$$a^2 \alpha y - b^2 \beta x - (a^2 - b^2) xy = 0$$

durch die Fusspunkte der Normalen. Die Gleichung, welche die Ordinaten dieser Fusspunkte giebt, heisst:

$$(a^2 - b^2) y^4 + 2b^2 (a^2 - b^2) \beta y^3 + \dots - b^6 \beta^2 = 0.$$

Ein Kreis habe die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0.$$

Die Ordinaten der Schnittpunkte des Kreises und der Ellipse erfüllen die Gleichung:

$$(a^2 - b^2)^2 y^4 + 4Bb^2(a^2 - b^2)y^3 + \dots + b^4[(a^2 + C)^2 - 4a^2A^2] = 0.$$

Sei $x_1 y_1$ der Punkt A der ausgezeichneten Normale der Aufg. 1146 und seien y_2, y_3, y_4 die Ordinaten der Fusspunkte der übrigen Normalen, also der Punkte B, C, D . Soll der Kreis durch die Punkte B, C, D gehen, so muss sein:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= \frac{-2b^2\beta}{a^2 - b^2}, \\ -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= \frac{-4Bb^2}{a^2 - b^2}, \end{aligned}$$

also:

$$y_1 = \frac{b^2}{a^2 - b^2} (2B - \beta),$$

und da:

$$y_1 = \frac{b^2\beta}{b^2 + k}$$

ist, so ist:

$$2B = \frac{a^2 + k}{b^2 + k} \beta, \quad 2A = \frac{b^2 + k}{a^2 + k} \alpha.$$

Lässt man P sich auf der dem Werte k entsprechenden Ellipse bewegen, so beschreibt das Centrum T des dem Dreieck BCD umschriebenen Kreises eine Ellipse, welche man aus den beiden letzten Gleichungen leicht erhält.

Die Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks BCD sind:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a^2 + b^2 + 2k}{3(a^2 - b^2)} y_1, \\ x &= \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3(a^2 - b^2)} x_1. \end{aligned}$$

Dieser Punkt G beschreibt eine Ellipse. Ist ferner H der Schnittpunkt der Höhen und J das Centrum des durch die Fusspunkte der durch H gehenden Höhenperpendikel, so hat man eine Figur P, A, T, G, J ; alle Geraden dieser Figur sind Normalen an eine feste Ellipse. Eine dieser Geraden verbindet zwei Punkte, deren Koordinaten von der Form $(\lambda x_1, \lambda' y_1), (\mu x_1, \mu' y_1)$ sind und es ist klar, dass wenn x_1, y_1 die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschreibt, die beiden Punkte Ellipsen

beschreiben, welche dieselben Axen der Lage nach haben, und dass die gerade Linie, welche die Punkte verbindet, Normale an eine Ellipse ist, welche der Lage nach dieselben Axen hat.

Giebt man k den Wert $-(a^2 + b^2)$, also $2A = -x_1$, $2B = -y_1$, so findet man leicht den Satz 1148.

1149. Nimmt man die Axen des Kegelschnittes zu Koordinatenaxen, ist MN der zu PQ konjugierte Durchmesser und d die Länge CO , so sind die Gleichungen von PQ , MN , OK :

$$y = mx, \quad y = -\frac{b^2 x}{a^2 m}, \quad y = -\frac{1}{m}(x - d).$$

Setzt man die Werte der Koordinaten des Punktes O in die Gleichung der Normalen in H , so findet man die Gleichung von GH :

$$x = \frac{a^2}{c^2} d.$$

Die Abscisse des Punktes R hat denselben Wert.

1150, 1151. Man sieht leicht ein, dass die Aufg. 1150 in der gestellten Form unbestimmt ist. Ist ein Dreieck einem Kegelschnitte umschrieben, so gehen die geraden Linien, welche die Ecken mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten verbinden, durch einen Punkt P . Lässt man das Dreieck sich so um den Kegelschnitt bewegen, dass der Punkt P immer derselbe gegebene Punkt bleibt, so beschreiben die Ecken des Dreiecks einen Kegelschnitt. Wenn ein Kegelschnitt und ein fester Punkt in der Ebene gegeben ist, so kann man bekanntlich den ersteren in einen Kreis projizieren, für welchen die Projektion dieses Punktes der Mittelpunkt ist; man hat ihn nur so zu projizieren, dass die Projektion der Polare jenes Punktes in unendlicher Entfernung erscheint. Die Projektion des dem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecks wird ein dem Kreise umschriebenes gleichseitiges Dreieck. Ist die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = z^2$, so beschreiben die Dreiecksecken den Kreis $x^2 + y^2 = 4z^2$. Dieses gleichseitige Dreieck ist in Bezug des Kreises $x^2 + y^2 + 2z^2 = 0$ sich selbst konjugiert. Geht man zur ursprünglichen Figur zurück, so beschreiben die Ecken des Dreiecks einen bekannten Kegelschnitt und das Dreieck ist in Bezug auf einen bestimmten

Kegelschnitt sich selbst konjugiert. Für diesen Fall stimmen also die Aufg. 1150, 1151 überein.

Es sei die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben; (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''') seien die Ecken eines in Bezug auf die Ellipse sich selbst konjugierten Dreiecks. Es bestehen dann die Gleichungen:

$$\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} = 1 = \frac{x'x'''}{a^2} + \frac{y'y'''}{b^2} = \frac{x''x'''}{a^2} + \frac{y''y'''}{b^2},$$

also:

$$x' - x'' = -\frac{a^2}{b^2} y''' \frac{y' - y''}{x'''},$$

Die Ecken des Dreiecks liegen auf dem Kreise:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2;$$

es ist also:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 - 2\alpha x' - 2\beta y' &= r^2 - \alpha^2 - \beta^2 = x''^2 + y''^2 - 2\alpha x'' - 2\beta y'' \\ &= x'''^2 + y'''^2 - 2\alpha x''' - 2\beta y'''. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} x' b^2 (y'' + y''' - 2\beta) &= y' a^2 (x'' + x''' - 2\alpha), \\ x'' b^2 (y' + y''' - 2\beta) &= y'' a^2 (x' + x''' - 2\alpha), \\ x''' b^2 (y' + y'' - 2\beta) &= y''' a^2 (x' + x'' - 2\alpha). \end{aligned}$$

Subtrahiert man je zwei dieser Gleichungen, so erhält man:

$$(a^2 + b^2) \frac{x''}{a^2} \cdot \frac{x'''y' - y'''x'}{y''' - y'} = r^2 - \alpha^2 - \beta^2.$$

Es ist aber:

$$\frac{x'''x''y'}{a^2} = y' - \frac{y'y''y'''}{b^2}, \quad \frac{x''x'y'''}{a^2} = y''' - \frac{y'y''y'''}{b^2},$$

also $a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$, d. h. das Quadrat der Länge der Tangenten, welche vom Mittelpunkte eines Kegelschnittes an den einem in Bezug auf ihn sich selbst konjugierten Dreieck umgeschriebenen Kreis gehen, ist gleich der Summe der Quadrate der Halbaxen. Nach Aufg. 756 beschreibt aber der Schnittpunkt der einander rechtwinkligen Tangenten an den Kegelschnitt einen Kreis $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, d. h. die um die Dreiecke, welche in Bezug auf einen Kegelschnitt sich selbst konjugiert sind, umgeschriebenen Kreise schneiden den Kreis

senkrecht, in welchem sich die zueinander rechtwinkligen Tangenten an den Kegelschnitt schneiden.

Wenn zwei Kreise einen dritten Kreis senkrecht schneiden, so geht die Radikalaxe der Inversen der beiden Kreise durch einen von ihrer Lage unabhängigen festen Punkt. Die beiden Kreise:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} &= 0, \\ x^2 + y^2 + 2a''_{13}x + 2a''_{23}y + a''_{33} &= 0 \end{aligned}$$

schneiden den Kreis:

$$x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

senkrecht unter der Bedingung:

$$2a_{13}a'_{13} + 2a_{23}a'_{23} = a_{33} + a'_{33}, \quad 2a_{13}a''_{13} + 2a_{23}a''_{23} = a_{33} + a''_{33}.$$

Der Ursprung sei das Centrum der Inversion; dann haben die Inversen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33}(x^2 + y^2) &= 0, \\ 1 + 2a''_{13}x + 2a''_{23}y + a''_{33}(x^2 + y^2) &= 0; \end{aligned}$$

die Gleichung der Radikalaxe ist:

$$\frac{1}{a''_{33}} - \frac{1}{a'_{33}} + 2x \left(\frac{a''_{13}}{a''_{33}} - \frac{a'_{13}}{a'_{33}} \right) + 2y \left(\frac{a''_{23}}{a''_{33}} - \frac{a'_{23}}{a'_{33}} \right) = 0,$$

diese gerade Linie geht durch den festen Punkt:

$$x = -\frac{a_{13}}{a_{33}}, \quad y = -\frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

Nimmt man zum Mittelpunkt der Inversion den Punkt a, b , so ist die Inverse des einen Kreises:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + 2a'_{13}a + 2a'_{23}b + a'_{33}) \{ (x - a)^2 + (y - b)^2 \} \\ + 2[a'_{13}(x - a) + a'_{23}(y - b)]r^2 + r^4 = 0. \end{aligned}$$

Transformiert man den Kegelschnitt und die Dreiecke durch reciproke Polaren in Bezug auf einen Kreis und die Kreise durch reciproke Radien in Bezug auf denselben Kreis, so erhält man den Satz:

Von einem Punkte O zieht man Senkrechte auf die Seiten eines in Bezug auf den Kegelschnitt sich selbst konjugierten Dreiecks; der Kreis, welcher durch die Fusspunkte der drei Perpendikel geht, und die entsprechenden Kreise haben denselben Radikalmittelpunkt. Den Radikalmittelpunkt erhält man dadurch, dass man von O auf zwei konjugierte Durchmesser

Senkrechte fällt, so geht die Verbindungslinie der Fusspunkte dieser Senkrechten durch das Radikalcentrum.

Hat der feste Punkt die Koordinaten x', y' , fällt man von ihm die Senkrechten auf die Axen und auf zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, so schneiden sich die resp. Verbindungslinien der Fusspunkte in dem festen Punkte $x'' = \frac{x' a^2}{a^2 + b^2}$, $y'' = \frac{y' b^2}{a^2 + b^2}$. Die Fusspunkte auf den konjugierten Durchmessern haben die Koordinaten:

$$x_1 = \frac{x' + y' \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad y_1 = \frac{x' + y' \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi;$$

$$x_2 = \frac{x' - \frac{b^2}{a^2} y' \operatorname{cotg} \varphi}{1 + \frac{b^4}{a^4} \operatorname{cotg}^2 \varphi}, \quad y_2 = - \frac{x' - \frac{b^2}{a^2} y' \operatorname{cotg} \varphi}{1 + \frac{b^4}{a^4} \operatorname{cotg}^2 \varphi} \frac{b^2}{a^2} \operatorname{cotg} \varphi.$$

Man verifiziert leicht, dass ist:

$$\frac{x'' - x_1}{y'' - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

1152. Die Gleichung der geraden Linie DE , auf welcher sich der Fusspunkt der Winkelhalbierenden bewegt, sei $A = 0$, die Gleichung von AB sei $B = 0$ und die der Senkrechten in A auf AB errichtet sei $C = 0$. Die Koordinaten von B sind in Dreieckskoordinaten $B = 0$, $C + mA = 0$. Bildet die gerade Linie AC mit AB den Winkel α , so ist die Gleichung von AC : $B = C \operatorname{tg} 2\alpha$.

Die Gleichung der Winkelhalbierenden bei A ist $B = C \operatorname{tg} \alpha$. Die Gleichung der geraden Linie, welche durch B geht und den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Geraden $A = 0$ enthält, ist also $B - \operatorname{tg} \alpha (C - mA) = 0$. Eliminiert man α , so erhält man als Gleichung des Ortes:

$$B = 0, \quad (C + mA)(mA - C) = B^2.$$

Man sieht, dass die Geraden $C + mA = 0$, $mA - C = 0$ Tangenten an den Kegelschnitt sind. Der Kegelschnitt hat als Brennpunkt den Punkt A und zur Direktrix die Gerade DE .

Ist $m < 1$, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse; ist $m = 1$, so ist der Kegelschnitt eine Parabel; ist $m > 1$, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

1153. Es seien O, A, B die Ecken des Dreiecks, OA und OB die Axen der x und der y ; $\vartheta = \sphericalangle AOB$; α und β die Koordinaten des gegebenen Punktes M ; $OA = a$, $OB = b$. Die Gleichung aller dem Dreieck einbeschriebenen Parabeln ist:

$$(y - lx)^2 - l^2 ax - by = 0;$$

damit die Parabel durch α, β geht, muss sein:

$$(\alpha^2 - a\alpha) l^2 - 2\alpha\beta l + \beta^2 - b\beta = 0.$$

Hieraus erhält man zwei Werte für l , nämlich l', l'' . Es ist:

$$l' + l'' = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - a\alpha}, \quad l'l'' = \frac{\beta^2 - b\beta}{\alpha^2 - a\alpha},$$

$$l' - l'' = \frac{2\sqrt{\alpha\beta(b\alpha + a\beta - ab)}}{\alpha^2 - a\alpha}.$$

Ist φ der konstante Winkel, so ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(l' - l'') \sin \vartheta}{1 + (l' + l'') \cos \vartheta + l'l''},$$

also:

$$x^2 + 2xy \cos \vartheta + y^2 - ax - by = 2\sqrt{xy(bx + ay - ab)} \frac{\sin \vartheta}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Der Ort ist eine Kurve vierten Grades. Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ist die Gleichung des Ortes:

$$x^2 + 2xy \cos \vartheta + y^2 - ax - by = 0,$$

also ein dem gegebenen Dreieck umschriebener Kreis.

1154. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = 2px$, a und b seien die Koordinaten von A ; die Gleichung der Polare CD von A ist:

$$by - px - ap = 0.$$

Die Gleichung der Hyperbel, welche die Fusspunkte der durch B gehenden Normalen enthält, ist:

$$xy + y(p - \alpha) - p\beta = 0,$$

wenn α, β die Koordinaten von B sind.

Die Hyperbel und Parabel werden von CD in den Punkten:

$$y^2 - 2by + 2ap = 0, \quad y^2 - \left(\frac{ap + \alpha p - p^2}{b} \right) y - \frac{p^2 \beta}{b} = 0$$

geschnitten und es muss daher sein:

$$2b^2 = ap + \alpha p - p^2, \quad 2ab = -p\beta.$$

1. Bewegt sich B auf einer geraden Linie, so müssen α und β der Gleichung

$$\beta = c\alpha + d$$

genügen. Der Ort des Punktes A ist eine Hyperbel:

$$2cy^2 + 2xy - cpx + p(pc + d) = 0,$$

deren eine Asymptote der Axe der x und deren andere Asymptote der Senkrechten auf der gegebenen geraden Linie parallel ist.

2. In diesem Falle ist $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$ und die Gleichung des Ortes von A :

$$(2y^2 + p^2 - px)^2 + 4x^2y^2 = r^2p^2.$$

1155. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, welche die drei Seiten $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ berühren, ist:

$$\text{oder:} \quad \sqrt{a}A + \sqrt{b}B + \sqrt{c}C = 0,$$

$$a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 - 2bcBC - 2caCA - 2abAB = 0 = f(A, B, C).$$

Damit diese Gleichung eine gleichseitige Hyperbel darstellt, muss sein:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha + 2ca \cos \beta + 2ab \cos \gamma = 0,$$

wenn α , β , γ die Dreieckswinkel sind. Die Dreieckskoordinaten des gegebenen Punktes seien A' , B' , C' . Schreibt man die Gleichung der Kegelschnitte:

$$Af'_A + Bf'_B + Cf'_C = 0,$$

so ist die Gleichung der Polaren von A' , B' , C' in Bezug auf den Kegelschnitt:

$$A'f'_A + B'f'_B + C'f'_C = 0;$$

und man erhält:

$$\text{oder:} \quad \frac{f'_A}{BC' - CB'} = \frac{f'_B}{CA' - AC'} = \frac{f'_C}{AB' - BA'},$$

$$\frac{a(bB + cC - aA)}{BC' - CB'} = \frac{b(cC + aA - bB)}{CA' - AC'} = \frac{c(aA + bB - cC)}{AB' - BA'}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a}{A (BC' - CB')^2} = \frac{b}{B (CA' - AC')^2} = \frac{c}{C (AB' - BA')^2}.$$

Setzt man dies in die Bedingungsgleichung der gleichseitigen Hyperbel ein, so hat man:

$$\begin{aligned} & A^2 (BC' - CB')^4 + B^2 (CA' - AC')^4 + C^2 (AB' - BA')^4 \\ & + 2AB (BC' - CB')^2 (CA' - AC')^2 \cos \gamma \\ & + 2CA (BC' - CB')^2 (AB' - BA')^2 \cos \beta \\ & + 2BC (BA' - AB')^2 (CB' - AC')^2 \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

1156, 1157. Nimmt man AOB als rechtwinkliges Dreieck, C als Mittelpunkt der Hypotenuse AB , $AO = a$, $OB = b$ die Längen der Katheten. OA sei Axe der x , OB die Axe der y . Die Punkte A und B haben resp. die Koordinaten $(a, 0)$, $(0, b)$. Die Gleichung der Parabeln durch A , O , B ist:

$$m^2 y (y - b) + 2mxy + x(x - a) = 0.$$

Der Berührungspunkt einer Tangente an die Parabel parallel AB liegt auf dem Durchmesser der Parabel, welcher durch die Mitte von AB , also durch den Punkt $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ geht. Es ist also:

$$2y - b = -\frac{1}{m} (2x - a).$$

Der gesuchte Ort ist dargestellt durch die Gleichungen:

$$ay + bx = 0, \quad 4xy + ay + bx = 0$$

Verschiebt man die Koordinatenachsen nach C , so wird die Gleichung der Parabeln:

$$m^2 (4y + b)(4y - 3b) + 2m(4x + a)(4y + b) + (4x + a)(4x - 3a) = 0,$$

und die Gleichung der Hyperbel:

$$4xy = \frac{ab}{4}.$$

Die Ordinaten der Schnittpunkte der Parabeln und Hyperbel sind bestimmt durch die Gleichung:

$$64m^2 y^3 - 16(3m^2 b - 2ma) y^2 + 4a(2mb - 3a) y + a^2 b = 0.$$

Ist y die Ordinate des Schwerpunktes des Dreiecks, so ist:

$$3y = \frac{3mb - 2a}{4m}.$$

Für die Abscissen hat man:

$$64x^3 - 16(3a - 2mb)x^2 + 4m(2ab - 3mb^2)x + m^2ab^2 = 0.$$

Es ist die Abscisse des betrachteten Schwerpunkts:

$$3x = \frac{3a - 2mb}{4}.$$

Der gesuchte Ort hat also die Gleichung, wenn man wieder die Axen nach O verschiebt:

$$36xy = ab.$$

1158, 1159. Es sei β die Ordinate des Mittelpunktes der Berührungssehne; bezieht man die Parabel auf die dieser Sehne parallelen Tangenten und auf ihren Durchmesser, so ist $x - \alpha_1 = 0$, die Gleichung der Berührungssehne und die Gleichung der Parabel ist:

$$y^2 = 2 \frac{p^2 + \beta^2}{p} x.$$

Es sei x' die Abscisse des Centrums der Ellipse; die Koordinaten des Berührungspunktes genügen der Gleichung:

$$\frac{2(p^2 + \beta^2)\alpha_1}{pb'^2} + \frac{(x' - \alpha_1)^2}{a'^2} = 1,$$

wenn die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ ist.

Ferner ist:

$$(x' - \alpha_1)(x' + \alpha_1) = a'^2.$$

Eliminiert man α_1 , so hat man:

$$\frac{p^2 + \beta^2}{pb'^2} \left(\frac{p^2 + \beta^2}{pb'^2} - \frac{2x'}{a'^2} \right) + \frac{1}{a'^2} = 0.$$

Es ist:

$$x' = \alpha - \frac{\beta^2}{2p} = \frac{2p\alpha - \beta^2}{2p},$$

also:

$$p^2b'^4 - pb'^2(p + 2\alpha)(p^2 + \beta^2) + (a^2 + b^2)(p^2 + \beta^2)^2 = 0,$$

mithin:

$$[p(a^2 + b^2) - (p + 2\alpha)(p^2 + \beta^2)][p(a^2 + b^2)^2 - (p + 2\alpha)a^2b^2] + [(a^2 + b^2)(p^2 + \beta^2) - a^2b^2]^2 = 0,$$

da ist:

$$a^2b^2 = a'^2b'^2 \frac{p^2}{p^2 + \beta^2}, \quad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Eliminiert man x' in den Gleichungen:

$$x'^2 - \alpha_1^2 = a'^2, \quad \left(\frac{p^2 + \beta^2}{pb'^2} \right) \cdot \left(\frac{p^2 + \beta^2}{pb'^2} - \frac{2x'}{a'^2} \right) + \frac{1}{a'^2} = 0,$$

so erhält man:

$$p^2 b'^2 + b'^2 (p^2 + \beta^2) (p^2 + \beta^2) \mp (\beta^2 - 2p\alpha) - (a^2 + b^2) (p^2 + \beta^2)^2 = 0.$$

Und hieraus folgt, wenn man statt b'^2 die obigen Werte einsetzt:

$$\begin{aligned} & \{ (p^2 + \beta^2) [(p^2 + \beta^2) \mp (\beta^2 - 2p\alpha)] + p^2 (a^2 + b^2) \} \\ & \cdot \{ a^2 b^2 (p^2 + \beta^2) \mp (\beta^2 - 2p\alpha) + p^2 (a^2 + b^2) \} \\ & + p^2 [(a^2 + b^2) (p^2 + \beta^2) + a^2 b^2]^2 = 0. \end{aligned}$$

Ist von der Parabel der Scheitel gegeben, ein Punkt und eine Tangente, so kann man die Parabel leicht konstruieren. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = px$, der Punkt habe die Koordinaten (x', y') und die Gleichung der Tangente kann man schreiben $-\frac{xp}{D} + \frac{2yy'''}{D} - \frac{px'''}{D} = 0$, wenn man setzt $D = \sqrt{p^2 + 4y'''^2}$. Der Pol der Verbindungslinie der Punkte $(0, 0)$, (x', y') ist $\left(0, \frac{y'}{2}\right)$; ist also A der Scheitel, M der Punkt (x', y') und J der Mittelpunkt von AM , so liegt der Pol von AM auf einem über AJ als Durchmesser beschriebenen Kreis. Hat der Punkt x', y' von der gegebenen Tangente die Entfernung p_3 , der Punkt $\left(0, \frac{y'}{2}\right)$ von der Tangente die Entfernung p_2 und der Scheitel A die Entfernung p_1 , so ist:

$$-\frac{y'y'''}{D} + \frac{y'''^2}{D} = p_2, \quad \frac{y'''^2}{D} = p_1, \quad \frac{(y' - y''')^2}{D} = p_3, \quad y'''^2 = px'''.$$

Hieraus folgt $p_1^2 = p_3 \cdot p_2$. Da p_3 und p_2 bekannt sind, so ist auch p_1 bestimmt, mithin der Pol von AM , also die Tangente im Scheitel und in (x', y') , also auch der Hauptdurchmesser etc. Im allgemeinen giebt es vier Längen.

1160. Wenn x', y' die Koordinaten von M sind, die Gleichung der Hyperbel auf die Axen bezogen ist, so ist:

$$MT^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2} y'^2$$

und

$$MQ^2 = \frac{MP^2}{\sin^2 MQP} = \frac{y'^2}{\sin^2 MQP} = y'^2 \frac{a^2 + b^2}{b^2} = MT^2.$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaft kann man eine Hyperbel konstruieren, wenn die Transversalaxe AB und ein Punkt M bestimmt ist. Man beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, an welchen man von M aus eine Tangente MT legt. Mit dem Radius MT beschreibe man einen Kreis, dessen Centrum M ist; dieser Kreis schneidet die Gerade AB in den Punkten Q, Q' . Indem man durch den Mittelpunkt von AB Parallele zu MQ, MQ' zieht, erhält man die Asymptoten der Hyperbel.

1161. Gebraucht man Dreieckskoordinaten und nimmt eines der Dreiecke als Fundamentaldreieck, so hat der eine Kegelschnitt die Gleichung:

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$

und der Kegelschnitt, welcher durch die drei Ecken (x_n, y_n, z_n) des zweiten Dreiecks geht, hat die Gleichung:

$$\frac{ax_1x_2x_3}{x} + \frac{a'y_1y_2y_3}{y} + \frac{a''z_1z_2z_3}{z} = 0.$$

Hieraus folgt, dass die sechs Ecken auf einem Kegelschnitt liegen.

Sind die Gleichungen der Seiten des zweiten Dreiecks:

$$D_n = u_nx + v_ny + w_nz,$$

so ist die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts:

$$\sqrt{\frac{u_1u_2u_3x}{a}} + \sqrt{\frac{v_1v_2v_3y}{a'}} + \sqrt{\frac{w_1w_2w_3z}{a''}} = 0;$$

diese Gleichung beweist, dass die sechs Seiten einen Kegelschnitt berühren.

Aus den Gleichungen:

$$\frac{b}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{b''}{z} = 0, \quad \frac{bx^2}{x_1x_2x_3} + \frac{b'y^2}{y_1y_2y_3} + \frac{b''z^2}{z_1z_2z_3} = 0$$

folgt, dass die sechs Ecken, welche einem Kegelschnitte angehören, zwei Systeme von drei Punkten konjugiert in Bezug auf einen Kegelschnitt bilden; ebenso folgt aus den Gleichungen:

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0, \quad \frac{ax^2}{u_1u_2u_3} + \frac{by^2}{v_1v_2v_3} + \frac{cz^2}{w_1w_2w_3} = 0,$$

dass sechs Tangenten eines Kegelschnittes zwei Systeme von drei Linien konjugiert in Bezug auf einen Kegelschnitt bilden.

Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitte einbeschrieben, so ist die Gleichung des Kegelschnittes:

$$\frac{b}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{b''}{z} = 0.$$

Sind die Punkte (x_n, y_n, z_n) die Ecken des zweiten Dreiecks, so hat eine Dreiecksseite die Gleichung:

$$\frac{bx}{x_1x_2} + \frac{b'y}{y_1y_2} + \frac{b''z}{z_1z_2} = 0.$$

Diese gerade Linie ist Tangente an den Kegelschnitt:

$$b\sqrt{\frac{x}{x_1x_2x_3}} + b'\sqrt{\frac{y}{y_1y_2y_3}} + b''\sqrt{\frac{z}{z_1z_2z_3}} = 0.$$

Die sechs Seiten sind Tangenten an einen Kegelschnitt.

Sind die zwei Dreiecke dem Kegelschnitte umschrieben, so folgt aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{bx} + \sqrt{b'y} + \sqrt{b''z} &= 0, \\ \frac{b^2}{u_1u_2u_3x} + \frac{b'^2}{v_1v_2v_3y} + \frac{b''^2}{w_1w_2w_3z} &= 0, \end{aligned}$$

dass deren Ecken auf einem Kegelschnitt liegen.

1162. Die Ellipse und Hyperbel schneiden sich in vier Punkten $ABCD$, welches die Ecken eines in Bezug auf den Kegelschnitt konzentrischen Rechtecks sind. Die gemeinsamen Sekanten AC , BD werden durch den Mittelpunkt der Kegelschnitte halbiert; die Sekanten AB , CD sind der Axe OX parallel und die Sekanten AD , BC sind der Axe OY parallel. Man hat mithin drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die gemeinsamen Sekanten sind AC , BD .

Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte sind:

$$\begin{aligned} S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad S' = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0, \\ a^2 > \lambda > b^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Berührungssehnens seien $y - mx = 0$, $y - m'x = 0$; die Gleichung des Kegelschnittes K hat die Formen:

$$K = S - k(y - mx)^2 = 0, \quad K = S' - k'(y - m'x)^2 = 0.$$

Da beide Gleichungen denselben Kegelschnitt darstellen sollen, so muss sein:

$$\frac{1}{a^2} - km^2 = \frac{1}{a^2 - \lambda} - k'm'^2, \quad \frac{1}{b^2} - k = \frac{1}{b^2 - \lambda} - k', \quad km = k'm',$$

also auch:

$$mm' = -\frac{b^2(b^2 - \lambda)}{a^2(a^2 - \lambda)}.$$

Die Tangente parallel dem Durchmesser der Ellipse, welcher konjugiert der Geraden $y = mx$ ist, hat die Gleichung:

$$y = -\frac{b^2x}{a^2m} \pm \frac{b\sqrt{b^2 + a^2m^2}}{am}$$

und die Tangente parallel dem Durchmesser der Hyperbel, welcher konjugiert dem Durchmesser $y = m'x$ ist, hat die Gleichung:

$$y = -\frac{(b^2 - \lambda)x}{(a^2 - \lambda)m'} \pm \frac{\sqrt{b^2 - \lambda} \sqrt{(a^2 - \lambda)m'^2 + b^2 - \lambda}}{m' \sqrt{a^2 - \lambda}}.$$

Der gesuchte Ort ist:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 - \lambda,$$

also ein Kreis, welcher durch die vier Punkte A, B, C, D geht.

2. Die gemeinsamen Sekanten sind parallel OX ; die Berührungssehnens sind auch OX parallel.

Die Gleichungen der Berührungssehnens seien $y - h = 0$, $y - h' = 0$; es ist:

$$K = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1\right) - k(y - h)^2 = 0,$$

$$K = \left(\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1\right) - k'(y - h')^2 = 0,$$

also:

$$\frac{a^2 - \lambda}{a^2} = \frac{(b^2 - \lambda)(1 - b^2k)}{b^2[1 - k'(b^2 - \lambda)]} = \frac{kh}{k'h'} = \frac{1 + kh}{1 + k'h'}$$

und

$$(b^2 - a^2)hh' = b^2(b^2 - \lambda).$$

Der Pol der geraden Linie $y - h = 0$ hat in Bezug auf die Ellipse die Koordinaten $0, \frac{b^2}{h}$, die Tangenten von diesem Punkte an die Ellipse haben also die Gleichung:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)(b^2 - h^2) - (y - h)^2 = 0.$$

Ebenso findet man die Tangenten, welche die Hyperbel an den Schnittpunkten von $y = h'$ berühren; deren Gleichung ist:

$$\left(\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1\right)(b^2 - \lambda - h'^2) - (y - h')^2 = 0.$$

Der gesuchte Ort hat die Gleichung:

$$x^2(2a^2b^2 - a^4 - b^2\lambda) + a^2y^2(a^2 - \lambda) - a^2(a^2 - \lambda)(b^2 - a^2) = 0.$$

Setzt man hier statt x, y, a, b resp. die Werte y, x, b, a , so erhält man die Lösung für den dritten Fall, in welchem die gemeinsamen Sehnen und die Berührungssehne der Axe OY parallel laufen. Es ist mithin die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$y^2(2a^2b^2 - b^4 - a^2\lambda) + b^2x^2(b^2 - \lambda) - b^2(b^2 - \lambda)(a^2 - b^2) = 0.$$

1163. Sind O, O' die Mittelpunkte und $r, r', r < r'$ die Radien der Kreise, so ist OO' die Axe der Parabel. Die Berührungspunkte der Parabel mit den Kreisen seien M, M' ; $MS, M'S'$ seien die Tangenten an die Kreise, welche OO' in S, S' treffen. Der Brennpunkt der Parabel liegt in der Mitte von $O'S$ und von OS' ; die Radien OM, OM' sind Normalen an die Kurve, und wenn man von M, M' die Senkrechten auf die Axe OO' fällt, so werden die Subnormalen gleich dem Parameter p der Parabel.

Die Dreiecke $OMS, O'M'S'$ geben:

$$r^2 = p \cdot OS, \quad r'^2 = p \cdot O'S',$$

also:

$$\frac{r'^2 - r^2}{p} = O'S' - OS = 2OO' = 2d.$$

Die Aufgabe ist unmöglich, wenn die Ungleichheit

$$\frac{r'^2 - r^2}{2d} < r$$

besteht.

1164. Bewegt der Punkt M sich auf dem Kreise, so bleibt der Winkel bei M konstant. Es ist bekannt, dass der Winkel, welchen zwei Tangenten an die Parabel bilden, gleich der Hälfte des Winkels ist, unter welchem man vom Brennpunkt aus die Berührungssehne sieht. Ist also F ein Punkt des gesuchten Ortes, so ist der Winkel AFB konstant; der Ort ist mithin ein Kreis.

1165. Der Mittelpunkt des Kreises sei der Koordinatenursprung, r der Radius des Kreises, k^2 die Potenz von A in Bezug auf den Kreis, p die Senkrechte vom Ursprung auf die Berührungssehne, der Punkt A liege auf der Axe der x . Die allgemeine Gleichung der berührenden Kegelschnitte ist:

$$x^2 + y^2 - r^2 - m(x \cos \omega + y \sin \omega p)^2 = 0.$$

Die Bedingung, dass diese Gleichung eine gleichseitige Hyperbel, welche durch A geht, darstellen soll, führt auf die Gleichung:

$$p = a \cos \omega - \frac{k}{\sqrt{2}}.$$

Die Senkrechte p ist eine Symmetrieaxe der in C und D tangierenden gleichseitigen Hyperbel. Ist O' der Mittelpunkt der Hyperbel, so ist $OO' = 2p$ und die Gleichung des Ortes ist:

$$\varrho = 2a \cos \omega - k \sqrt{2}.$$

1166. Nimmt man statt des Kegelschnittes einen Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkte O , ist AMB das Dreieck, C der Schnittpunkt von OM mit AB , m^2 der gegebene Inhalt und $\angle AOM = \varphi$, so ist:

$$AM = r \operatorname{tg} \varphi, \quad MC = r \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi, \quad AC = r \sin \varphi,$$

also:

$$\frac{r^2 \sin^3 \varphi}{\cos \varphi} = m^2, \quad r^4 \sin^6 \varphi = m^4 (1 - \sin^2 \varphi).$$

Setzt man $\sin^2 \varphi = u$, so ist:

$$r^4 u^3 + m^4 u - m^4 = 0;$$

diese Gleichung hat nur eine reelle Wurzel. Man hat also:

$$OM = \frac{r}{\sqrt{1-u}},$$

der gesuchte Ort ist ein dem gegebenen Kreise konzentrischer Kreis mit dem Radius:

$$\frac{r}{\sqrt{1-u}} = a'.$$

Ist der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, so kann man diese als Projektion eines Kreises mit dem Radius a betrachten, welcher in einer Ebene liegt, die mit der Ebene der Ellipse einen Winkel, dessen Cosinus gleich $\frac{b}{a}$ ist, bildet. Man hat den Radius a' des Kreises, des Ortes des Punktes M zu bestimmen, dass jedes Dreieck, gebildet aus den Tangenten von diesen Punkten M an den Kreis mit dem Radius a und der Berührungssehne den konstanten Inhalt $\frac{a}{b} m^2$ hat. Projiziert man diesen Kreis auf die Ebene der Ellipse zurück, so erhält man als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2 a'^2} = 1.$$

Wird die grosse Axe der Ellipse unendlich gross, so erhält man eine Parabel und der gesuchte Ort ist eine Parabel mit derselben Axe.

Setzt man $-b^2$ statt b^2 , so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel und die Gleichung des Ortes ist:

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{a^2 y^2}{b^2 a'^2} = 1.$$

1167. Die Gleichung der Ellipse sei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; die Gleichungen von zwei Tangenten an die Ellipse kann man schreiben:

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1, \quad \frac{x \cos \varphi'}{a} + \frac{y \sin \varphi'}{b} = 1.$$

Diese beiden Tangenten schneiden sich in dem Punkte:

$$x = a \frac{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi}{2}}, \quad y = b \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi}{2}}.$$

Damit dieser Punkt auf dem Kreise mit dem Radius $a + b$ liegt, muss sein:

$$a^2 \cos^2 \frac{\varphi + \varphi'}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\varphi + \varphi'}{2} = (a + b)^2 \cos^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2}.$$

Die Gleichungen der den Tangenten entsprechenden Normalen sind:

$$\frac{by}{\sin \varphi} - \frac{ax}{\cos \varphi} + c^2 = 0, \quad \frac{by}{\sin \varphi'} - \frac{ax}{\cos \varphi'} + c^2 = 0.$$

Der Normalenschnittpunkt hat die Koordinaten:

$$x' = \frac{c^2}{a} \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \frac{\cos^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi}{2}},$$

$$y' = \frac{c^2}{b} \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \frac{\cos^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} - \cos^2 \frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi}{2}}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $x'^2 + y'^2 = (a - b)^2$.

1168. Es sei F ein Punkt des gesuchten Ortes, A der gegebene Endpunkt der Brennpunktaxe, B der Berührungspunkt der gegebenen Tangente, C der Schnittpunkt dieser Tangente mit der in A auf die Brennpunktaxe errichteten Senkrechten, $\sphericalangle BAF = \varphi$, $\sphericalangle ABF = \psi$, $\sphericalangle CBA = \alpha$.

Es ist:

$$\sin CFA = \frac{AC}{CF}, \quad \sin CFB = \frac{BC}{CF} \sin(\psi + \alpha),$$

also:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin CBA}{\sin CAB} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} = \sin(\psi + \alpha).$$

Setzt man $BA = a$, nimmt die gerade Linie BA zur Axe der x und die darauf Senkrechte im Punkte B zur Axe der y , so hat man:

$$\cos \varphi = \frac{a - x}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}}, \quad \cos \psi = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}},$$

und die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$\sin^2 \alpha (x^2 + y^2) y - (a - x)^2 (y \cos 2\alpha + x \sin 2\alpha) = 0.$$

1169. Die Gleichungen der geraden Linien CB , CA , AB seien $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, die Gleichung des Kegelschnittes kann man schreiben:

$$AB - lC^2 = 0.$$

Die Gleichungen der geraden Linien Am , An , Bm' , Bn' sind:

$$B - \mu C = 0, \quad B - \nu C = 0, \quad A - \mu' C = 0, \quad A - \nu' C = 0, \\ \mu \mu' = \nu \nu' = l.$$

Die vier Geraden AC , AB , Am , An oder

$$B = 0, \quad C = 0, \quad B - \mu C = 0, \quad B - \nu C = 0$$

bilden ein Strahlenbüschel, dessen Doppelverhältnis gleich $\frac{\mu}{\nu}$ ist.

Die vier Strahlen BA , BC , Bm' , Bn' oder

$$C = 0, \quad A = 0, \quad C - \frac{1}{\mu'} A = 0, \quad C - \frac{1}{\nu'} A = 0$$

haben das Doppelverhältnis $\frac{\nu'}{\mu'} = \frac{\mu}{\nu}$. Das anharmonische Verhältnis der vier Punkte C , B , m , n ist also gleich dem der Punkte A , C , m' , n' .

Die Gleichungen der vier geraden Linien mn' , $m'n$, MN , AB sind:

$$B + \frac{\mu\nu}{l} A - \mu C = 0, \quad B + \frac{\mu\nu}{l} A - \nu C = 0,$$

$$B + \frac{\mu\nu}{l} A - (\mu + \nu) C = 0 \text{ und } C = 0,$$

woraus folgt, dass diese geraden Linien durch einen Punkt gehen.

1170. Die Gleichungen der Kreise A und B seien:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (x - d)^2 + y^2 = r_1^2.$$

Die Gleichung des Kreises C hat die Form:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = (r + \varrho)^2.$$

Die Radikalaxe der Kreise B und C hat die Gleichung:

$$\varrho^2 - r_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 - d^2 - 2(\alpha - d)x - 2\beta y.$$

Um die Enveloppe dieser geraden Linie zu finden, muss man α und β zwischen den beiden letzten Gleichungen und

der Gleichung $\alpha y = \beta x$ eliminieren; man erhält als Gleichung des Ortes:

$$[(r + \varrho)^2 - d^2] x^2 + (r + \varrho)^2 y^2 - d (r^2 + r_1^2 - 2r\varrho - d^2) x = \frac{1}{4} (r^2 + r_1^2 + 2r\varrho - d^2)^2.$$

1171, 1172. Man bezeichne die vier gegebenen geraden Linien mit A, B, C, D , den Schnittpunkt der geraden Linien M und N mit (M, N) . Der gesuchte Ort geht offenbar durch die sechs Ecken $(A, C), (A, D), (A, B), (B, C), (B, D), (C, D)$. Die gegenüberliegenden Scheitel der Kegelschnitte können auf den geraden Linien folgendermassen liegen:

- 1) A und B, C und D ;
- 2) A und C, B und D ;
- 3) A und D, B und C .

Die Scheitel sollen auf A und B, C und D liegen. Es sei m ein Punkt der geraden Linie C ; durch M ziehe man eine gerade Linie, welche A in a und B in b schneidet; m_1 sei der Mittelpunkt der Strecke ab ; mh sei senkrecht auf ab und h der Schnittpunkt der geraden Linien mh und $(A, B)m_1$. Dreht man die gerade Linie ab um m , so beschreibt der Punkt h einen Kegelschnitt, und zwar eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die Punkte (A, B) und m geht und deren Asymptoten den Halbierungslinien der Winkel zwischen A und B parallel sind. Von m fälle man eine Senkrechte auf D , halbiere die Länge der Senkrechten zwischen m und D , ziehe durch den Mittelpunkt d dieser Strecke eine Parallele D_1 mit D , so schneidet diese gerade Linie die gleichseitige Hyperbel in zwei Punkten, welche Mittelpunkte von zwei der gegebenen Kegelschnitte sind.

Lässt man den Punkt m die gerade Linie C durchlaufen, so erhält man alle gleichseitigen Hyperbeln, welche dieselbe Asymptotenrichtung haben, durch den Punkt (A, B) gehen und sich in einem Punkte c der geraden Linie C schneiden. Errichtet man auf C ein Perpendikel, welches A in a' und B in b' schneidet, so ist der Punkt c derjenige, welcher $a'b = cb'$ erfüllt.

Hieraus folgt, dass alle Hyperbeln eine Schar von Kegelschnitten mit vier gemeinsamen Punkten $[(A, B), c$ und die beiden unendlich fernen] bilden. Jeder dieser Hyperbeln entspricht eine gerade Linie D_1 parallel D . Die Schnittpunkte der Geraden D_1 mit den Hyperbeln liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, welche sich in diesem Falle auf einen Kegelschnitt und der unendlich fernen geraden Linie reduziert. Sucht man nämlich die Gerade D_1 , welche dem unendlich fernen Punkt auf C entspricht, so findet man eine unendlich ferne gerade Linie. Die entsprechende Hyperbel reduziert sich auf die gerade Linie $(A, B) c$ und die unendlich ferne gerade Linie.

Der Kegelschnitt geht durch die Punkte $(A, B), (C, D), c$ und drei andere Punkte a', b', d' , welche auf den geraden Linien A, B, D ebenso wie c auf der geraden Linie C erhalten werden. Auf dieselbe Art erhält man noch zwei Kegelschnitte, welche resp. durch $(A, C), (B, D); (A, D), (B, C)$ gehen.

Sind fünf gerade Linien A, B, C, D, E gegeben, liegen auf A, B, C, D die Scheitel, so konstruiere man wie oben den Ort der Centra und schneide diesen mit der geraden Linie E ; es giebt also sechs verschiedene Lösungen.

1173. Es sollen $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ die rechtwinkligen Koordinaten der drei Brennpunkte, ferner K_{23}, K_{31}, K_{12} die drei Kegelschnitte, welche zu je zwei einen Brennpunkt gemein haben, und a, b, c die Brennpunktsachsen sein.

Setzt man:

$$(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2 = d_n^2; \quad n = 1, 2, 3;$$

$$(2x - a_2 - a_3)(a_3 - a_2) + (2y - b_2 - b_3)(b_3 - b_2) = A_1,$$

$$(2x - a_3 - a_1)(a_1 - a_3) + (2y - b_3 - b_1)(b_1 - b_3) = A_2,$$

$$(2x - a_1 - a_2)(a_2 - a_1) + (2y - b_1 - b_2)(b_2 - b_1) = A_3,$$

so sind die Gleichungen der Kegelschnitte:

$$K_{23} \begin{cases} 4a^2 d_3^2 = (A_1 - a^2)^2, \\ 4a^2 d_2^2 = (A_1 + a^2)^2, \end{cases} \quad K_{31} \begin{cases} 4b^2 d_1^2 = (A_2 - b^2)^2, \\ 4b^2 d_3^2 = (A_2 + b^2)^2, \end{cases}$$

$$K_{12} \begin{cases} 4c^2 d_2^2 = (A_3 - c^2)^2, \\ 4c^2 d_1^2 = (A_3 + c^2)^2. \end{cases}$$

Die Gleichungen der gemeinsamen Sehnen sind:

$$\begin{aligned} 1) \quad c A_2 - b A_3 - b c (b + c) &= 0, & 1') \quad c A_2 + b A_3 + b c (b - c) &= 0, \\ 2) \quad a A_3 - c A_1 - c a (c + a) &= 0, & 2') \quad a A_3 + c A_1 + c a (c - a) &= 0, \\ 3) \quad b A_1 - a A_2 - a b (a + b) &= 0, & 3') \quad b A_1 + a A_2 + a b (a - b) &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt der Satz leicht.

1174. Die Gleichung der beiden Kurven gemeinschaftlichen Sehne ist:

$$\frac{x}{a} \cos \alpha - \frac{y}{b} \sin \alpha = \cos 2\alpha,$$

oder wenn man statt α den Wert $\frac{\pi}{4} - \varphi$ einsetzt:

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right) \sin \varphi + \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

oder:

$$p + q \operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin \varphi; \quad p = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}, \quad q = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

Für die Enveloppe ist aber:

$$\cos^3 \varphi = \frac{q}{2^{\frac{3}{2}}}, \quad \sin^3 \varphi = \frac{p}{2^{\frac{3}{2}}},$$

also die Gleichung der Enveloppe der gemeinsamen Sehne:

$$p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}} = 2.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes der gemeinsamen Sehne sind:

$$x = a \frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{2}, \quad y = b \frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{2};$$

hieraus folgt als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

1175. Man bezeichne mit F den gemeinschaftlichen Brennpunkt, mit F' den zweiten Brennpunkt des festen Kegelschnittes, mit F'' den zweiten Brennpunkt des beweglichen Kegelschnittes. Man ziehe FA , FB , $F'C$, $F'D$, $F''E$, $F''G$ senkrecht auf die gemeinsamen Tangenten. Es ist dann, wenn b , b' die halben Axen, welche die Brennpunkte nicht enthalten, sind:

$$FA \cdot F'C = b^2, \quad FA \cdot F''E = b'^2,$$

also:

$$F'C : F''E = b^2 : b'^2.$$

Ebenso hat man $F'D : F''G = \frac{b^2}{b'^2}$, mithin:

$$\frac{F'C}{F''E} = \frac{F'D}{F''G}.$$

Ist M der Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten, so liegen F' , F'' , M in einer geraden Linie. Es ist ferner:

$$\frac{F'M}{F''M} = \frac{F'C}{F''E} = \frac{F'D}{F''G} = \frac{b^2}{b'^2}.$$

Der Punkt F'' liegt daher auf einem Kreise, dessen Centrum F' ist, und der Punkt M befindet sich auf einem Kreise, dessen Centrum in der geraden Linie $F'F$ in einer Entfernung $d = \frac{2b^2c}{b^2 - b'^2}$ von F' ist und dessen Radius die Länge $\frac{2b^2c'}{b^2 - b'^2}$ hat, wenn $2c$, $2c'$ die Entfernungen der Brennpunkte beider Kegelschnitte bezeichnen.

Sind für irgend eine Lage beide Tangenten parallel, so ist $F'C = F''E$ oder $F'CxFA = F''ExFA$, also $b^2 = b'^2$, d. h. die Tangenten sind für jede Lage parallel.

1176. Es ist leicht zu zeigen, dass A' , B' , C' in einer geraden Linie liegen.

Man hat ein Viereck $ACA'C'$ mit den Diagonalen AA' , CC' und die Linie BB' , welche die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten verbindet. Die Kreise über AA' , BB' , CC' schneiden sich in denselben Punkten.

1177. Die Gleichung einer Parabel bezogen auf den Scheitel ist $y^2 = 2px$. Eine gerade Linie schneide die Parabel in P , P_1 und den Durchmesser durch den Scheitel in M . Es ist $\frac{PM}{P_1M} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$, wenn P die Abscisse x_1 und P_1 die Abscisse x_2 hat. Ändert man die Axe der x , lässt den Ursprung und die Axe der y unverändert, so bleibt dies Verhältniss ungeändert.

Der Berührungspunkt der drei Parabeln sei der Koordinatenursprung, die gemeinsame Tangente die Axe der y . Die Ecken des Dreiecks seien A_1 , A_2 , A_3 und x_1 , x_2 , x_3 die Abscissen der Dreiecksecken. Der Durchmesser der Parabel,

welche durch A_1 und A_2 geht, schneidet $A_1 A_3$ so, dass die Segmente das Verhältniss $\sqrt{\frac{x_2}{x_2}}$ haben; ebenso wird $A_2 A_3$ im Verhältniss $\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}$ und $A_3 A_1$ im Verhältniss $\sqrt{\frac{x_3}{x_1}}$ durch den entsprechenden Durchmesser geschnitten. Das Produkt dieser drei Zahlen ist die Einheit, woraus folgt, dass die geraden Linien, welche diese Punkte mit den gegenüberliegenden Dreiecksecken berühren, sich in einem Punkte schneiden.

1178. Wenn man vom Brennpunkt eines Kegelschnittes gerade Linien unter konstantem Winkel gegen die Tangenten des Kegelschnittes zieht, so beschreiben die Schnittpunkte der geraden Linien und der Tangenten einen Kreis (s. Aufg. 817).

Transformiert man diesen Satz mittelst Aufg. 1133 durch die Methode der reciproken Polaren, so sieht man, dass die gesuchte Enveloppe ein Kegelschnitt, welcher den festen Punkt als Brennpunkt besitzt, ist. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, wenn der gegebene Punkt im Innern des Kreises ist, er ist eine Parabel, wenn der feste Punkt auf dem Kreise, und eine Hyperbel, wenn der feste Punkt ausserhalb des Kreises liegt.

1179. Die Gleichungen der drei Kreise seien:

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y = 0,$$

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y = 0,$$

$$K_3 \equiv x^2 + y^2 + a_3 x + b_3 y = 0.$$

Die Radikalaxen dieser Kreise gehen durch die Ecken des Sechsecks 1, 2, 3, 4, 5, 6 und es sind die Gleichungen der geraden Linien:

$$14 : (a_1 - a_2) x + (b_1 - b_2) y = 0,$$

$$25 : (a_2 - a_3) x + (b_2 - b_3) y = 0,$$

$$36 : (a_3 - a_1) x + (b_3 - b_1) y = 0.$$

Auf dem Kreise K_1 liegen die Punkte 1, 5, 6, auf dem Kreise K_2 die Punkte 1, 2, 3 und auf dem Kreise K_3 die Punkte 3, 4, 5. Der Beweis folgt hieraus einfach.

1180. Die Gleichung der Parabel sei $y^2 = 2px$; der gegebene Punkt, welcher vom Ursprung die Entfernung l habe,

besitze die Koordinaten x_1, y_1 ; α, β sollen die Koordinaten des gesuchten Mittelpunktes des Kreises sein. Die Gleichung des Kreises ist:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = l^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1.$$

Dieser Kreis schneidet die Parabel in vier Punkten. Damit der Kreis die Parabel doppelt berührt, muss die Gleichung vierten Grades in y — die resultierende Gleichung der Elimination von x in den beiden Kurvengleichungen — zwei Paar gleiche Wurzeln besitzen. Man findet, dass sein muss:

$$(p - \alpha)^2 = 2\alpha x_1 - l^2, \quad \alpha^2 - 2(x_1 + p)\alpha + l^2 + p^2 = 0,$$

$$\alpha = x_1 + p \pm \sqrt{2px_1 - y_1^2}.$$

Da der Punkt im Innern der Parabel liegt, so ist:

$$2px_1 > y_1^2,$$

also α immer reell; die Aufgabe hat zwei Lösungen.

1181. Die Gleichungen des Kegelschnittes und der beiden Kreise seien:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2\beta y - c^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2\beta' y - c^2 = 0.$$

Die Bedingungen, dass die gerade Linie $y = mx + n$ gemeinschaftliche Tangenten an diese Kurven sei, sind:

$$n^2 = a^2 m^2 + b^2,$$

$$m^2 \beta^2 + 2\beta n + c^2 (m^2 + 1) - n^2 = 0,$$

$$m^2 \beta'^2 + 2\beta' n + c^2 (m^2 + 1) - n^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\beta + \beta' = -\frac{2n}{m^2}, \quad \beta\beta' = \frac{c^2 (m^2 + 1) - n^2}{m^2},$$

also:

$$\beta' - \beta = \frac{2b(1 + m^2)}{m^2}.$$

Der Winkel, unter welchem sich die beiden Kreise schneiden, ist gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c(\beta' - \beta)}{c^2 + \beta\beta'},$$

oder:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2bc}{c^2 - b^2},$$

d. h. φ ist konstant.

1182. Wenn die Gleichung des Kegelschnitts $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, so liegen die Punkte M, M' auf dem Kreise $x^2 + y^2 = a^2$. Hat der Schnittpunkt P der beiden Tangenten die Koordinaten x', y' , so gehören die Punkte M, M' auch dem Kreise, dessen Gleichung

$$(x - c)(x - x') + y(y - y') = 0$$

ist, an. Die allgemeine Gleichung aller Kreise durch M, M' hat die Form:

$$(x - c)(x - x') + y(y - y') - l(x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

Bestimmt man l so, dass der Kreis durch N geht, so hat der Kreis die Gleichung:

$$(cx - a) \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 \right) - \frac{cx'y'}{a^2b^2} y \left[\frac{(x - c)a^2}{x'} - \frac{b^2y}{y'} \right] = 0 = K.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Kreis durch den Schnittpunkt der geraden Linien

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1, \quad \frac{(x - c)a^2}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = 0,$$

d. h. durch den Punkt N' geht.

Die Gleichung der geraden Linie MM' ist:

$$x(c + x') + yy' - (a^2 + cx') = 0.$$

Die Gleichungen der Tangenten in den Punkten N, N' des Kreises K sind:

$$\left(x - \frac{a^2}{c} \right) (x' - c) - yy' = 0,$$

$$\left[\frac{x'(x' - c)}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} \right] \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 \right) + \frac{cx'y'^2}{a^4b^4} (a^2 - cx') \left[\frac{(x - c)a^2}{x'} - \frac{b^2y}{y'} \right] = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt, dass die Tangenten in N, N' sich auf M, M' schneiden.

1183–1191. Die Gleichung der Parabel sei $y = x^2$. Die Ecken des in die Parabel eingeschriebenen Dreiecks seien

P_1, P_2, P_3 mit den resp. Koordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$.
Der Inhalt des Dreiecks ist:

$$(P_1 P_2 P_3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} (x_2 - x_3) (x_3 - x_1) (x_1 - x_2).$$

Die Koordinaten des Poles Q_1 der geraden Linie $P_2 P_3$ sind $\frac{1}{2} (x_2 + x_3), x_2 x_3$; ebenso hat man die Koordinaten des Poles Q_2 der geraden Linie $P_1 P_3$, nämlich $\frac{1}{2} (x_1 + x_3), x_1 x_3$, und die Koordinaten $\frac{1}{2} (x_1 + x_2), x_1 x_2$ des Poles Q_3 der geraden Linie $P_1 P_2$.

Es ist also:

$$(Q_1 Q_2 Q_3) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_2 x_3 & 1 \\ x_3 + x_1 & x_3 x_1 & 1 \\ x_1 + x_2 & x_1 x_2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} (P_1 P_2 P_3).$$

Abgesehen vom Vorzeichen beweist diese Gleichung den Satz 1183.

Ist R_1 der Berührungspunkt der Tangente parallel $P_2 P_3$, so ist dessen Abscisse $\frac{1}{2} (x_2 + x_3)$, ist R_2 der Berührungspunkt der Tangente parallel $P_1 P_3$, so ist dessen Abscisse $\frac{1}{2} (x_1 + x_3)$, und ist R_3 der Berührungspunkt der Tangente parallel $P_1 P_2$, so ist dessen Abscisse $\frac{1}{2} (x_1 + x_2)$ und es ist:

$$(R_1 R_2 R_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \begin{vmatrix} x_2 + x_3 & (x_2 + x_3)^2 & 1 \\ x_3 + x_1 & (x_3 + x_1)^2 & 1 \\ x_1 + x_2 & (x_1 + x_2)^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Es gilt also abgesehen vom Vorzeichen Satz 1184.

Durch den Punkt P_1 resp. P_2, P_3 zieht man eine Parallele $P_2 P_3$ resp. $P_1 P_3, P_1 P_2$, welche die Parabel in S_1 resp. S_2, S_3 trifft. Die Abscissen von S_1, S_2, S_3 sind:

$$x_2 + x_3 - x_1, \quad x_1 + x_3 - x_2, \quad x_1 + x_2 - x_3.$$

Die Koordinaten der Pole P'_3, P'_2, P'_1 von $P_1 S_1, P_2 S_2, P_3 S_3$ sind:

$$\frac{x_2 + x_3}{2}, x_1(x_2 + x_3 - x_1); \quad \frac{x_1 + x_3}{2}, x_2(x_1 + x_3 - x_2);$$

$$\frac{x_2 + x_1}{2}(x_1 + x_2 - x_3).$$

Bildet man die Determinanten, welche den Inhalt des Dreiecks $S_1 S_2 S_3$ und den Inhalt des Dreiecks $P'_1 P'_2 P'_3$ bestimmen, so erhält man abgesehen vom Vorzeichen Satz 1185.

Es seien die beiden Dreiecke $M_1 M_2 M_3$, $P_1 P_2 P_3$ der Parabel eingeschrieben, die Punkte M haben die resp. Abscissen m_1, m_2, m_3 und die Punkte P die resp. Abscissen x_1, x_2, x_3 . Durch M_1 zieht man eine Parallele zu $P_2 P_3$, welche die Parabel in N_1 trifft; ebenso bestimmt man die Punkte N_2, N_3 . Der Inhalt von $N_1 N_2 N_3$ ist:

$$\frac{1}{2}(m_2 + x_2 - m_3 - x_3)(m_3 + x_3 - m_1 - x_1)(m_1 + x_1 - m_2 - x_2).$$

Durch P_1 zieht man eine Parallele zu $M_2 M_3$, welche die Parabel in L_1 trifft; ebenso erhält man die Punkte L_2, L_3 . Die Abscisse von L_1 ist $m_2 + m_3 - x_1$; der Inhalt des Dreiecks $L_1 L_2 L_3$ ist gleich dem Inhalt des Dreiecks $N_1 N_2 N_3$. Bezeichnet endlich K_n den Berührungspunkt der Tangente an die Parabel, welche der geraden Linie $M_n P_n$ parallel ist, so ist die Abscisse von K_n gleich $\frac{1}{2}(m_n + x_n)$; der Inhalt des Dreiecks $K_1 K_2 K_3$ ist abgesehen vom Vorzeichen gleich dem achten Teile des Inhalts des Dreiecks $N_1 N_2 N_3$. Hieraus folgt Satz 1186. Lässt man M_1, M_2, M_3 zusammenfallen, so erhält man den Satz 1187.

Ist der Parabel das Viereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ eingeschrieben, so ist:

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1 P_2 P_3) + (P_1 P_3 P_4),$$

also:

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4).$$

Setzt man in dieser Formel $\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ statt x_n , so erhält man den Satz:

„Das Viereck, welches gegeben ist durch die Berührungspunkte der Tangenten an die Parabel, die den Seiten eines

eingeschriebenen Vierecks parallel sind, hat unter Berücksichtigung der Vorzeichen einen Inhalt gleich Null.“

Bestimmt man zu den Seiten des eingeschriebenen Vierecks die Pole, so erhält man den Satz:

„Das Viereck, gebildet aus den Tangenten an die Parabel, parallel den Seiten eines eingeschriebenen Vierecks, hat unter Berücksichtigung der Vorzeichen einen Inhalt gleich Null.“ (1188.)

Ist ein n -Eck $ABCD \dots N$ der Parabel eingeschrieben und sind $a, b, c, d \dots n$ die Pole der geraden Linien $AB, BC, CD \dots NA$, so ist:

$$(abcde \dots n) = -\frac{1}{2}(ABCD \dots N).$$

Für ein Dreieck ist diese Formel richtig; soll sie allgemein gelten, so muss man zeigen, dass sie ihre Gültigkeit für ein $(n+1)$ -Eck behält. Nimmt man zu dem n -Eck noch einen Punkt P , ist der Pol von NP der Punkt N' und der Pol von PA der Punkt p , so ist $(nn'p) = -\frac{1}{2}ANP$. Durch Addition findet man:

$$(abcd \dots np) = -\frac{1}{2}(ABCD \dots NP),$$

also:

„Der Inhalt des Polygons, gebildet aus n Tangenten der Parabel, ist gleich der Hälfte des Inhalts — mit entgegengesetztem Zeichen — des Polygons, welches die Berührungspunkte zu Ecken hat.“

Die Aufg. 1190, 1191 geben die Sätze:

„Wenn ein Dreieck ABC einer Parabel einbeschrieben ist, die Punkte A', B', C' die Seiten BC, CA, AB halbieren und die geraden Linien $A'B', B'C', C'A'$ die Parabel in den Punkten $A'', B''_1; B'', C''_1; C'', A''_1$ schneiden, so bilden die Mittelpunkte der Strecken $A''B''_1, B''C''_1, C''A''_1$ ein Dreieck, dessen Inhalt, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, gleich der Hälfte des Inhalts des Dreiecks ABC ist.“

„Der Inhalt des Dreiecks, gebildet aus den Polen der geraden Linien, welche die Mittelpunkte der Seiten eines der Parabel eingeschriebenen Dreiecks verbinden, ist gleich dem vierten Teile des Inhalts des eingeschriebenen Dreiecks.“

1192—1196. Die Gleichung der Hyperbel sei $xy = 1$ und die Axen seien rechtwinklig; die Formeln gelten aber nicht nur für die gleichseitige Hyperbel, sondern für jede beliebige Hyperbel, indem man die betreffenden Formeln für den Inhalt mit dem Sinus des Winkels der Asymptoten multipliziert

Der Inhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$, eingeschrieben der Hyperbel, ist:

$$(P_1 P_2 P_3) = \frac{1}{2} \frac{x_2 - x_3}{x_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_3}.$$

Der Pol Q_3 der Sehne $P_1 P_2$ hat die Koordinaten:

$$x = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}, \quad y = \frac{2}{x_1 + x_2}.$$

Der Inhalt des Dreiecks $Q_1 Q_2 Q_3$ ist:

$$(Q_1 Q_2 Q_3) = -2 \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_3 + x_1} \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}.$$

Liegt der Schwerpunkt des eingeschriebenen Dreiecks auf der einen Asymptote, z. B. auf der Axe der y , so ist $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, also ist $(P_1 P_2 P_3) = \frac{1}{4} (Q_1 Q_2 Q_3)$. Liegt der Schwerpunkt des eingeschriebenen Dreiecks auf der Hyperbel, so ist:

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1} \cdot \frac{x_3 + x_1}{x_2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_3} = 8.$$

Hieraus folgt abgesehen vom Vorzeichen der Satz 1193.

Ist die Sehne PP_1 parallel $P_2 P_3$, so ist $xx_1 = x_2 x_3$; ist die Tangente PP' parallel $P_2 P_3$, so ist für den Berührungspunkt $x = \pm \sqrt{x_2 x_3}$; der Berührungspunkt ist immer reell, wenn x_2 und x_3 dasselbe Vorzeichen haben, d. h. P_2 und P_3 müssen auf derselben Hyperbelast liegen. Bildet man den Inhalt des Dreiecks mit den Berührungspunkten als Ecken, so erhält man abgesehen vom Vorzeichen den Satz 1194 und ebenso den Satz 1195.

Der Inhalt des Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$ ist:

$$\frac{1}{2} (x_1 - x_3) (x_2 - x_4) \left(\frac{1}{x_1 x_3} - \frac{1}{x_2 x_4} \right).$$

Setzt man hier $\pm \sqrt{x_n x_{n+1}}$ statt x_n , so erhält man unter Berücksichtigung der Vorzeichen den Satz:

„Das Viereck gebildet aus den Berührungspunkten der Tangenten auf einem Hyperbelast, welche den Seiten eines der Hyperbel an denselben Ast eingeschriebenen Vierecks parallel laufen, hat den Inhalt Null.“

1197. Die Parabel sei bezogen auf ihre Axen und Scheitel-tangente. Die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Parabel doppel berührt, ist:

$$y^2 - 2px - (x \cos \alpha + y \sin \alpha - \lambda)^2 = 0.$$

Nach der Aufgabe ist aber:

$$y^2 - 2p \left(\frac{\lambda - y \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = 0,$$

also:

$$\lambda \cos \alpha = 2p.$$

Der Mittelpunkt der Hyperbeln ist durch die Gleichungen:

$$p + \cos \alpha (x \cos \alpha + y \sin \alpha - \lambda) = 0,$$

$$y - \sin \alpha (x \cos \alpha + y \sin \alpha - \lambda) = 0.$$

Eliminiert man α und λ , so hat der gesuchte Ort die Gleichung $y^2 = \frac{p}{2} (x - p)$. Der gesuchte Ort ist also eine Parabel, deren Parameter der vierte Teil des Parameters der gegebenen Parabel ist.

1198 Nimmt man die gemeinsame Tangente und die Normale zu Koordinatenaxen, sind die Axen der Ellipsen $a, \frac{a}{k}$, so ist die Gleichung des Kegelschnitts:

$$x^2 + k^2 y^2 - 2ax = 0.$$

Die Gleichung der Normalen von dem Punkte $P (\alpha, \beta)$ aus ist:

$$(\alpha - x) y k^2 = (\beta - y) (x - \alpha).$$

Eliminiert man a , so hat man die Gleichung des gesuchten Ortes:

$$(1 - 2k^2) y x^2 + 2\alpha x y k^2 - \beta x^2 - k^2 y^3 + \beta k^2 y^2 = 0.$$

Der Ort ist eine Kurve dritten Grades, welcher im Ursprung einen Doppelpunkt besitzt.

Ist $k = \sqrt{3}$, $\alpha = \beta$, so ist die Gleichung des Ortes:

$$- 5x^2 y + 6\alpha x y - \alpha x^2 - 3y^3 + 2\alpha y^2 = 0.$$

Wird aber $k = 1:\sqrt{3}$, so ist die Gleichung des Ortes:

$$yx^2 + 2\alpha xy - 3\alpha x^2 - y^3 + \alpha y^2 = 0,$$

welche in die Gleichungen

$$y - x = 0, \quad y^2 + xy - \alpha y - 3\alpha x = 0$$

zerlegt werden kann. Der Ort ist also eine gerade Linie durch den Punkt P und den Scheitel und eine Hyperbel, deren Centrum die Koordinaten $5\alpha, 3\alpha$ hat.

1199. Die Aufgabe ist unbestimmt. Nimmt man aber an, dass M der Endpunkt der kleinen Axe der Ellipsen ist, so beschreiben die Brennpunkte einen Kreis, dessen Durchmesser MO ist. Seien $2a$ und $2b$ die Axen einer Ellipse, welche im Punkte M den Krümmungsradius $MO = R$ hat. Der Punkt M sei der Koordinatenursprung, die Tangente und Normale die Koordinatenachsen. Die Koordinaten des Brennpunktes F sind $x = b, y = \sqrt{a^2 - b^2}$; es ist $\frac{a^2}{b} = R$, also der gesuchte Ort $x^2 + y^2 - Rx = 0$.

1200, 1201. Die Gleichung des Kreises O ist $x^2 + y^2 = r^2$; die Gleichung der geraden Linie CD ist $y - ax - b = 0$; mithin die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch A, B, C, D geht, ist:

$$x^2 + y^2 - r^2 + l(y - ax - b)y = 0.$$

Damit diese Gleichung eine gleichseitige Hyperbel darstellt, muss $l = -2$ sein. Der Ort der Berührungspunkte der Tangenten ist dargestellt durch die Gleichungen:

$$x^2 + (2a^2 + 1)y^2 + 2axy - r^2 = 0$$

und der Ort der Aufg. 1201 hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + rx\sqrt{2} = 0, \quad x^2 + y^2 - rx\sqrt{2} = 0.$$

1202. Siehe Aufg. 1199.

1203. Die Gerade DD' durch C gezogen sei auf A, B senkrecht und die Entfernung der Schnittpunkte dieser Geraden mit A, B sei $2d = DD'$. Der Mittelpunkt O von DD' sei der Ursprung der Koordinaten und DD' die Axe der y des rechtwinkligen Koordinatensystems; es sei $cO = c'$ und α die veränderliche Abscisse des Schnittpunktes O' der geraden Linie cab mit der Axe der x . Der Punkt O' liegt auf dem

Kreise $(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$. Da der Kreis durch a geht, so ist eine Gleichung:

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{d^2}{c'^2}\right) - 2\alpha x + x^2 + y^2 - d^2 = 0.$$

Um die Enveloppe zu finden, muss man in dieser Gleichung α so bestimmen, dass die Wurzeln für α gleich werden. Die Gleichung des Ortes ist:

$$\frac{x^2}{c'^2 - d^2} - \frac{y^2}{d^2} + 1 = 0.$$

1204. Die rechtwinkligen Koordinatenaxen haben das Centrum des Kreises als Ursprung und die Axe der x geht durch den festen Punkt P . Die Gleichung des Kreises (1) ist $x^2 + y^2 = r^2$. Auf diesem Kreise liege der Punkt α, β , also ist (2): $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$. Der Kreis, dessen Mittelpunkt α, β ist und durch P geht, hat die Gleichung (3):

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2a\alpha - a^2 = 0,$$

wenn P die Abscisse a hat. Die Gleichung der den Kreisen (1) und (3) gemeinschaftlichen Sehne ist:

$$2\alpha x + 2\beta y - 2a\alpha + a^2 - r^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung, der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 = r$, und der Gleichung:

$$(x - a)\beta - ay = 0$$

erhält man als Gleichung der Enveloppe:

$$(x - a)^2 + y^2 = \frac{(a^2 - r^2)^2}{4r^2}.$$

Der beliebige Punkt sei A ; der feste Punkt P liege auf dem Kreise O , der veränderliche Kreis O' geht immer durch P und hat seinen Mittelpunkt auf O ; es ist also die Enveloppe der Polaren des Punktes A in Bezug auf O' zu bestimmen. Die Gleichung des Kreises O ist $x^2 + y^2 = r^2$; α, β seien die Koordinaten eines Punktes von O und O' , also ist auch $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$. Der Kreis, welcher durch P geht und α, β zum Mittelpunkte hat, hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2ar - r^2 = 0.$$

Sind p, q die Koordinaten von A , so hat die Polare von A in Bezug auf O' die Gleichung:

$$\alpha(x + p - 2r) + \beta(y + q) - (px + qy - r^2) = 0.$$

Für die Enveloppe besteht noch die Gleichung:

$$\alpha (y + q) - \beta (x + p - 2r) = 0.$$

Die Gleichung der Enveloppe ist:

$$(p^2 - r^2) x^2 + 2pqxy + (q^2 - r^2) y^2 - 4r^2 (p - r) x - 4qr^2 y - (p^2 + q^2) r^2 = 3r^4 - 4pr^3.$$

Jenachdem A ausserhalb, innerhalb oder auf dem Kreise O liegt, ist der Ort eine Hyperbel, Ellipse, Parabel.

1205. Der Mittelpunkt der Hyperbel sei der Koordinatenursprung, die Axe der x sei der gegebenen Richtung parallel und die Axe der y der zu der Axe der x konjugierte Durchmesser; die Axen bilden den Winkel ϑ . Die Gleichung der Hyperbel ist $x^2 - y^2 = a^2$, und die Gleichung der doppelt berührenden Parabel ist:

$$y^2 + 2mpx + a^2 + p^2 = 0; \quad m^2 = 1.$$

Die Koordinaten des Brennpunktes seien α, β . Es ist:

$$2mp\alpha + a^2 + p^2 = -m^2 p^2 = -\frac{mp\beta}{\cos \vartheta}, \quad mp = \frac{\beta}{\cos \vartheta},$$

also ist die Gleichung des Ortes der Brennpunkte:

$$\frac{2\beta^2}{\cos^2 \vartheta} + \frac{2\alpha\beta}{\cos \vartheta} + a^2 = 0.$$

Die Axe der Parabel hat die Gleichung $mp - \frac{y}{\cos \vartheta} = 0$.

Eliminiert man m und p , so hat man die Gleichung des Ortes der Scheitel:

$$y^2 (1 + \cos^2 \vartheta) + 2xy \cos \vartheta + a^2 \cos^2 \vartheta = 0.$$

1206. Es seien $a \cos \varphi, b \sin \varphi$ die Koordinaten von P , ϱ sei die Länge des Halbdurchmessers, welcher dem Durchmesser durch P konjugiert ist. Die Gleichung der Normale ist:

$$y - b \sin \varphi = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} (x - a \cos \varphi),$$

oder:

$$\frac{y - b \sin \varphi}{a \sin \varphi} = \frac{x - a \cos \varphi}{b \cos \varphi} = \frac{\sqrt{(y - b \sin \varphi)^2 + (x - a \cos \varphi)^2}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Es ist aber:

$$\varrho^2 + a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = a^2 + b^2, \quad \varrho^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi,$$

also:

$$\frac{y - b \sin \varphi}{a \sin \varphi} = \pm 1, \quad \frac{x - a \cos \varphi}{b \cos \varphi} = \pm 1.$$

Hieraus folgt:

$$x^2 + y^2 = (a + b)^2 \text{ und } x^2 + y^2 = (a - b)^2.$$

1207. Die Gleichung des Kegelschnittes sei in Dreiecks-
koordinaten:

$$aA^2 + bB^2 + cC^2 = 0.$$

Die Gleichung:

$$\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} = 0$$

sagt aus, dass die vier geraden Linien:

$$lA \pm mB \pm nC = 0$$

Tangenten an den Kegelschnitt sind. Die Polare des gegebenen Punktes A', B', C' hat die Gleichung $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$, welche identisch mit der Gleichung:

$$aAA' + bBB' + cCC' = 0$$

sein muss. Es ist also:

$$a = \frac{\lambda}{A'}, \quad b = \frac{\mu}{B'}, \quad c = \frac{\nu}{C'}.$$

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist also in Dreiecks-
koordinaten:

$$\frac{l^2 A'}{\lambda} + \frac{m^2 B'}{\mu} + \frac{n^2 C'}{\nu} = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, welcher in das durch die Diagonalen des gegebenen Vierecks gebildete Dreieck eingeschrieben ist.

Berichtigungen.

1. In der Aufgabensammlung.

- Aufg. 15 Zeile 1 lies: Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks.
„ 300 Zeile 4 lies: $a' : b'$ statt $a : b$.
„ 344 Zeile 2 lies: im Nenner $(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ statt $u^2 + v^2$.
„ 408 Zeile 5 lies: $y^2 + 8y$ statt $x^2 + 8x$.
„ 428 Zeile 1 lies: D_1 statt D .
„ 533 lies: $-8x - 7y$ statt $-8y - 7x$.
„ 535 lies: $x = 1$ statt $x + \frac{y}{4} = 1$.
„ 545 Zeile 4 lies: EF statt CF .
„ 555 lies: $u^2 + v^2 - 6w^2 - \dots$
„ 642 Zeile 3 lies: $R_1 R$ statt PR und Z. 4 lies: drehenden statt festen.
„ 647 lies: $0, y'$ statt x', y' .
„ 734 Zeile 2 lies: $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ statt $x_1 x_3 + x_2^2 = 0$.
„ 799 Zeile 3 lies: PBD statt PBC .
„ 806 Zeile 4 lies: FPN statt PFN .
„ 812 Zeile 2 lies: in F auf FF' trifft statt in F trifft.
„ Zeile 5 lies: Linie FF' , welche statt Linie, welche.
„ 823 Zeile 4 und 5 lies: welcher der Sehne parallel ist.
„ 962 Zeile 2 und 3 lies: $2a$ statt a und $2b$ statt b .
„ 1010 lies: Scheitel statt Brennpunkt.
„ 1053 Zeile 1 lies: einer Ellipse mit dem Centrum O sei.
„ 1085 Zeile 2 lies: P statt S .
„ 1102 Zeile 3 lies: der Kegelschnitte statt der Kreise.
„ 1132 lies: $y^2 = 2 [x \pm a]$, Zeile 5 lies: eine statt erste.
„ 1161 Zeile 8 lies: einen statt denselben.
„ 1182 Zeile 7 lies: N statt M' .

2. In den Lösungen.

- Aufg. 494—497 Zeile 8 lies: $-(a_{11} - a_{22})xy$ statt $+(a_{11} - a_{22})xy$.
„ 533 Zeile 5 und 6 lies:
$$44x - 22y (1 - \sqrt{5}) = 1 + 19\sqrt{5},$$
$$11x (1 - \sqrt{5}) + 22y = 24 - 5\sqrt{5}.$$

„ 534 Zeile 4 lies:
$$4x - y (1 - \sqrt{17}) = 2 - \sqrt{17}, 4x - y (1 + \sqrt{17}) = 2 + \sqrt{17}.$$

„ 537 Zeile 3 lies:
$$4y - x (1 - \sqrt{17}) = 2 - \sqrt{17}, 4y - x (1 + \sqrt{17}) = 2 + \sqrt{17}.$$

„ 541 Zeile 2 lies: 540 statt 539 und Zeile 3 lies: 539 statt 540.
Seite 107 Zeile 10 von unten lies: $-(a_{11} - a_{22})AB$ statt $+(a_{11} - a_{22})AB$.
Aufg. 740 Zeile 10 lies: $-4xy$ statt $4xy$.
„ 816 Zeile 3 lies: die Ellipse statt der Ellipse.

Verzeichnis

A. In der Anlage

1. Seite 1. Die Anlage ist in der Anlage

2. Seite 2. Die Anlage ist in der Anlage

3. Seite 3. Die Anlage ist in der Anlage

4. Seite 4. Die Anlage ist in der Anlage

5. Seite 5. Die Anlage ist in der Anlage

6. Seite 6. Die Anlage ist in der Anlage

7. Seite 7. Die Anlage ist in der Anlage

8. Seite 8. Die Anlage ist in der Anlage

9. Seite 9. Die Anlage ist in der Anlage

10. Seite 10. Die Anlage ist in der Anlage

11. Seite 11. Die Anlage ist in der Anlage

12. Seite 12. Die Anlage ist in der Anlage

13. Seite 13. Die Anlage ist in der Anlage

14. Seite 14. Die Anlage ist in der Anlage

15. Seite 15. Die Anlage ist in der Anlage

16. Seite 16. Die Anlage ist in der Anlage

17. Seite 17. Die Anlage ist in der Anlage

18. Seite 18. Die Anlage ist in der Anlage

19. Seite 19. Die Anlage ist in der Anlage

20. Seite 20. Die Anlage ist in der Anlage

21. Seite 21. Die Anlage ist in der Anlage

22. Seite 22. Die Anlage ist in der Anlage

B. In der Anlage

23. Seite 23. Die Anlage ist in der Anlage

24. Seite 24. Die Anlage ist in der Anlage

25. Seite 25. Die Anlage ist in der Anlage

26. Seite 26. Die Anlage ist in der Anlage

27. Seite 27. Die Anlage ist in der Anlage

28. Seite 28. Die Anlage ist in der Anlage

29. Seite 29. Die Anlage ist in der Anlage

30. Seite 30. Die Anlage ist in der Anlage

31. Seite 31. Die Anlage ist in der Anlage

32. Seite 32. Die Anlage ist in der Anlage

33. Seite 33. Die Anlage ist in der Anlage

- Herz, Dr. Norbert**, Leiter der von Kuffner'schen Sternwarte in Wien u. s. w., Lehrbuch der Landkartenprojektionen. (Mit zahlreichen Figuren im Text.) [XIV u. 312 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 10. —
- Hochheim, Dr. Adolf**, Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. A. Aufgaben. [67 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.20.
 ————— B. Auflösungen. [94 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.60.
- Hofmann, Fritz**, die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Eine Wanderung durch die Theorie der Kegelschnitte in doppelter Berührung an der Hand anschaulicher Methoden. [Mit Figuren im Text.] [IV u. 109 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.20.
- Holzmüller, Dr. G.**, Direktor der Gewerbeschule zu Hagen, Einführung in das stereometrische Zeichnen. Mit Berücksichtigung der Krystallographie und Kartographie. [VIII u. 102 S. mit 16 lithographierten Tafeln.] gr. 8. kart. n. *M.* 4.40.
- Killing, Dr. Wilhelm**, ord. Professor am königl. Lyceum Hosianum zu Braunsberg, die nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Mit einer lithographierten Tafel. [XI u. 264 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.80.
- Krause, Martin**, Professor der Mathematik an der Universität zu Rostock, die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Nebst Anwendungen. [VII u. 276 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 10. —
- Legendre, Adrien-Marie**, Zahlentheorie. Nach der dritten Auflage ins Deutsche übertragen von H. MASER. Zwei Bände. [I. Bd. XVIII u. 442, II. Bd. XII u. 453 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 23.20.
- Mansion, Dr. P.**, Professor an der Universität zu Gent, Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Übungsaufgaben. Zweite vermehrte Auflage. [XXIV u. 56 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.20.
- Neumann, Dr. F.**, Professor der Physik und Mineralogie, Vorlesungen über theoretische Optik, gehalten an der Universität zu Königsberg. Herausgegeben von Dr. E. DORN, Professor an der technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit Figuren im Text. (Mit einem Bildnis Neumanns in Lichtdruck.) [VIII u. 310 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 9.60.
 ————— Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von Dr. OSKAR EMIL MEYER, Professor der Physik an der Universität Breslau. Mit Figuren im Text. [XIV u. 374 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 11.60.
- Reidt, Dr. Friedrich**, Professor am Gymnasium und dem Realprogymnasiums in Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. Zweiter Teil: Stereometrie. Dritte Auflage. [VIII u. 190 S.] gr. 8. geh. *M.* 3. —

Reidt, Dr. Friedrich, Professor am Gymnasium und dem Realprogymnasiums in Hamm, Resultate der Rechnungs-Aufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. I. Teil: Trigonometrie. Dritte Auflage. [84 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.80.

———— Resultate der Rechnungs-Aufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. II. Teil: Stereometrie. Dritte Auflage. [48 S.] gr. 8. geh. *M* 1. —

Schoenflies, Dr. Arthur, Privatdocent der Mathematik an der Universität Göttingen, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Mit Figuren im Text. [VI u. 185 S.] gr. 8. geh. n. *M* 4. —

Diese Schrift giebt zum erstenmal eine zusammenhängende Darstellung der Geometrie der Bewegung (kinematische Geometrie).

Serret, J.-A., membre de l'Institut et du Bureau des longitudes, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von AXEL HARNACK, Dr., und Professor am Polytechnikum zu Dresden. Zweiter Band: Erste Hälfte. Integralrechnung. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VIII u. 380 S.] gr. 8. geh. n. *M* 7.20.

———— Zweiter Band: Zweite Hälfte. (Schluß.) Differentialgleichungen. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 388 S.] gr. 8. geh. n. *M* 7.20.

Der erste Band: Differentialrechnung erschien 1884 und kostet *M* 10. —

Stolz, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. Erster Theil: Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. [VI u. 344 S.] gr. 8. geh. n. *M* 8. —

Thieme, Dr. H., ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen, Sammlung von Lehrsätzen u. Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluß an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. KRETSCHMER bearbeitet. [VI u. 92 S.] gr. 8. kart. n. *M* 1.20.

Weyrauch, Dr. Jacob J., Professor an der polytechnischen Schule zu Stuttgart, Aufgaben zur Theorie elastischer Körper. Mit 110 Figuren im Text. [X u. 350 S.] gr. 8. geh. n. *M* 8. —

———— das Princip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer. Zur Orientirung. [48 S.] gr. 8. geh. *M* 1. —

Wüllner, Dr. Adolph, Professor der Physik an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. Dritter Band. Die Lehre von der Wärme. Vierte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. [Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten.] [VIII u. 825 S.] gr. 8. geh. n. *M* 12. —



Graefe, Friedrich

Auflösungen und Beweise der Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen
Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der
Kegelschnitte für Studierende an Universitäten und Technischen Hochschulen

Leipzig 1886

Math.p. 180 t-2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650933-2